Algebrák szorzástenzorának rangja

Andó-Kinorányi Szabolcs

Témavezető: Domokos Mátyás

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2021. december 17.

Alapkérdés

Probléma

Legyen K egy test, és A egy véges dimenziós K-algebra rögzített bázissal. Hány K-beli nem konstanssal történő szorzást kell elvégeznünk ahhoz, hogy kiszámítsuk két A-beli elem szorzatát? Jelölés: $L(A)$.

Példa

Legyen A, B két (komplex) mátrix. Hány szorzását kell elvégeznünk az a_{ij}, b_{kl} elemeknek AB minden elemének kiszámításához?

Tétel (Strassen, Winograd)

Két 2×2-es mátrix összeszorzásához pontosan 7 szorzás szükséges.

Definíció

Ha $U_1, ..., U_n$ vektorterek K test felett, akkor egy $T \in U_1 \otimes ... \otimes U_n$ tenzor *tenzorrangja* az a legkisebb r szám, melyre T előáll mint r db elemi tenzor összege.

Definíció

Legyen az A véges dimenziós K-algebra szorzása ϕ. Ekkor $\phi \in A^* \otimes A^* \otimes A$ tenzor. Az A algebra *rangja* ϕ tenzorrangja lesz. Ezt $R(A)$-val jelöljük.

- $L(A) \leq R(A)$.

Kvaternióalgebrák

Tétel (Howell és Lafon, 1975)

$R(\mathbb{H}) = 8$.

- Ezután a $K(a,b)$ kvaternióalgebrák rangját szerettük volna meghatározni ($\mathrm{char} K \neq 2$).

Tétel

A $K(a,b)$ kvaternióalgebrára ekvivalensek az alábbiak:

(i) $K(a,b) \cong M_2(K)$

(ii) $K(a,b)$ nem ferdetest

- A ferdetest esetet vizsgáltuk meg.
- Howell és Lafon bizonyításának egyik fele általánosítható: ha $K(a,b)$ ferdetest, akkor $R(K(a,b)) \geq 8$.

Felső korlát

- A triviális felső korlát $R(K(a,b))$-re 16.
- Próbálgatással: $R(K(a,b)) \leq 10$.

Ötlet

Ha $K(a,b) \cong M_2(K)$, akkor egy explicit izomorfizmus segítségével kiszámítottuk $K(a,b)$ szorzástenzorának héttagú felbontását.

- Ez segített megalkotni általánosan $K(a,b)$ szorzástenzorának egy jobb felbontását:

Állítás

$R(K(a,b)) \leq 9$.

Példák

- Speciális a, b-kre $R(K(a,b)) \leq 8$ is kihozható.

Állítás

Ha az $ax_1^2 + b(a+3)(a-1)x_2^2 = 1$ egyenletnek van K-ban megoldása, akkor $R(K(a,b)) \leq 8$.

Következmény

Az alábbi algebrák rangja 8:
$\mathbb{Q}(-1,-1), \mathbb{Q}(5,2), \mathbb{Q}(3,2), \mathbb{Q}(-5,-7)$.

A megoldás

- Végül a szakirodalomban megtaláltuk kérdésünkre a választ.

Tétel (Lysikov, 2013)

Ha $\mathrm{char} K \neq 2$, és $K(a,b)$ ferdetest, akkor $R(K(a,b)) = 8$.

$2 \times 2 \times 2$-es tenzorok

Cél

A $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$ tenzortéren a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ csoport hatásának pályáit kiszámolni.

- Ezt azért tűztük ki célul, hogy lássuk, hogy a kritérium, amit arra találtunk, hogy egy $K(a, b)$ rangja legfeljebb 8, javítható-e.
- Ez azért hasznos, mert a tenzorrang ezen hatás invariánsa.
- Ez még azelőtt volt, hogy Lysikov eredményét megtaláltuk volna.
- A stratégia az volt, hogy minden pályáról megadunk 1-1 tenzort.

$\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett

- Az a feladat, hogy a $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}^2$ tenzortéren a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ csoport hatásának mik a pályái, két speciális esetben ki vannak számolva.

Tétel (Richard Ehrenborg, 1999)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén 7 pálya van.

Tétel (Vin de Silva és Lek-Heng Lim, 2008)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén 8 pálya van.

- A fenti tételekben a pályák konkrét tenzorokkal vannak megadva.

$\mathbb{Q}$ felett

Tétel

$\mathbb{Q}$ felett a definiált hatásnak végtelen sok pályája van.

- A pályákat parametrizáló tenzorok között
  - volt egy végtelen család, melyet a négyzetmentes egészek parametrizáltak,
  - és ezeken kívül volt 5 kivételes tenzor.
- Ezután kiszámoltuk az egyes pályákon a tenzorrangokat.

Általános tételek

Probléma

Ha A egy n-dimenziós algebra, mely maximális kétoldali ideáljainak száma ℓ, akkor milyen alsó korlát mondható $L(A)$-ra, illetve $R(A)$-ra?

- Erre az alábbi tétel adja meg a választ.

Tétel (Alder és Strassen, 1981)

Ha az alaptest elemszáma legalább $2n - 2$, akkor $L(A) \geq 2n - \ell$.

- Azt is vizsgálták, hogy ez mikor éles.
- Markus Bläser 2003-ban klasszifikálta az összes ilyen algebrát.

Köszönöm szépen a figyelmet!