1. Csúcsszínezést indukáló élsúlyozások

1.1. Bevezetés

Projektmunkám témáját az 1-2-3 sejtés ihlette. Az 1-2-3 sejtés szerint minden legalább két élű összefüggő gráf élei megsúlyozhatóak az $1, 2, 3$ számokkal úgy, hogy a csúcsokra az oda illeszkedő élek súlyösszegét írva egy megengedett csúcsszínezést kapunk. Azt mondjuk, hogy egy gráf 1-2-3 tulajdonságú, ha igaz rá a sejtés. Hasonlóan definiálható, az a-b tulajdonság, annyi eltéréssel, hogy a súlyhalmazt az $1, 2, 3$-ról lecseréljük az a, b-re. A sejtés kapcsán számos további kérdés megfogalmazható, a félév során a sejtés ösztönözte új területeken kutattunk túlnyomóan. Mégpedig olyan a, b élsúlyozását vizsgáltuk a gráfoknak ahol megengedett indukált élsúlyozást kapunk a fenti értelemben.

1.2. Számítógépes előrehaladások

Felírtunk egy IP modellt az 1-2-3 sejtés modellezésére, amit később az általánosabb feladathoz is fel tudtunk használni.

$$
\begin{aligned}
x_i &\in \mathbb{Z} & \forall i : 1 \leq i \leq |E| && \text{(1a)}\\
1 &\leq x_i & \forall i : 1 \leq i \leq |E| && \text{(1b)}\\
x_i &\leq 3 & \forall i : 1 \leq i \leq |E| && \text{(1c)}\\
y_i &\in \mathbb{Z} & \forall i : 1 \leq i \leq |V| && \text{(1d)}\\
y_i &= \sum_{j \in J^*(i)} x_j & \forall i : 1 \leq i \leq |V| && \text{(1e)}\\
z_{ij} &\in \{0, 1\} & \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1f)}\\
y_i - y_j &\leq -\epsilon + M z_{ij} & \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1g)}\\
y_i - y_j &\geq \epsilon - (1 - z_{ij})M & \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1h)}
\end{aligned}
$$

Ahol a $J^*(i)$ azon j élindexek halmaza, melyekre e_j illeszkedik v_i-re.

Az IP modellt a LEMON [3] és a CPLEX [4] felhasználásával implementáltuk. Elsősorban a programot arra terveztük, hogy ellenőrizze, hogy az input gráf 1-2 tulajdonságú-e, és csak akkor ellenőrizze az 1-2-3 tulajdonságot, ha az 1-2 nem teljesül rá. Egészen az összes 12 csúcsú gráfig le tudtuk futtatni a programot, ezzel is megbizonyosodva a sejtés helyességéről 12 csúcsig, bár már erre a csúcsszámra is két hétig futott az Atlasz [5] szuperszámítógépen. A következő csúcsszámra, azaz a 13 csúcsú gráfokra a becslésünk szerint megközelítőleg 18 évig futna a program. Látható, hogy jelentős gyorsítások nélkül a 13 csúcsú gráfokra már reménytelen, hogy végig várjuk a futást.

További területeken is használtuk a modellt. Mint például mit tudunk abban az esetben, ha van egy páros gráfunk és az éleire már kezdetben is vannak írva a, b súlyok, akkor befejezhető-e, ha megengedett a-b élsúlyozást szeretnénk. Ez azért is érdekes, mert azt viszont már tudjuk, hogy páros gráfokra polinom időben eldönthető, hogy 1-2 tulajdonságúak-e [2] (és elég sok a, b számpárra is az 1, 2-őn kívül). Viszont arra az eredményre jutottunk, hogy ebben az esetben már egy NP-teljes problémához jutunk. Ebből kifolyólag visszalépve egyet fákra is megvizsgáltuk a befejezhetőséget és itt már tudtunk is egy polinomiális dinamikus programozási algoritmust adni arra, hogy egy megkezdett súlyozás befejezhető-e a fákon. Vagy egy másik terület ahol tudtuk használni a programot, Dudek és Wajc munkájához [1] kapcsolódik. Ők belátták, hogy 1-2 tulajdonság eldöntése tetszőleges gráfra NP-teljes, és úgy sejtették a cikkük végén, hogy a módszerük tetszőleges a, b-re is kiterjeszthető. Nekünk pedig a program segítségével sikerült megmutassuk (ahol a programmal a redukcióhoz szükséges gadgetek szerkezetét sikerült megsejtenünk), hogy ez a sejtés a $-1, 1$ számpártól eltekintve fennáll. Erre a kivételes esetre egy alapjaiban eltérő redukciót kellett adjunk NAE3SAT-ról, míg a többi esetre ezt a 3-SZÍN-ről tettük meg, ahogy Dudekék.

1.3. Terv a következő félévre

Jelenlegi kutatási témánk speciálisan a $0, 1$ súlyokra koncentrálódik. Ez az eset meglepő módon sokkal nehezebben kezelhetőnek tűnik. Már csak azért is, mert könnyű végiggondolni, hogy tetszőleges fa, bármilyen racionális a, b-re a-b tulajdonságú, kivéve, hogyha ez a $0, 1$ pár. Éppen ezért elkezdtük vizsgálni, hogy adható-e karakterizáció a 0-1 tulajdonságú fákra, amely alapján adható lenne egy polinomiális algoritmus, amely eldönti egy fáról, hogy rendelkezik-e a 0-1 tulajdonsággal. Eddigi eredményeink alapján nem nagyon várható olyan szép karakterizáció, mint amit Thomassenék cikkében [2] láthatunk páros gráfokra az 1-2 esetre (ott egyébként azt mutatják meg, hogy pontosan bizonyos kaktusz-szerű gráfok, amit most nem definiálnék pontosan nem rendelkeznek az 1-2 tulajdonsággal), mivel azt már beláttuk, hogy ennek a feladatnak a befokszám előírt irányítási feladat részfeladata. Ha pedig páros gráfokra nézzük a $0, 1$ súlyokat Thomassenék eredményéből inspirálódva, akkor eddigi számítógépes eredményeink alapján (15 csúcsig néztük meg a páros gráfokat) azt láttuk, hogy azok a bizonyos kaktusz-szerű gráfok ebben az esetben is nem 0-1 tulajdonságúak, viszont ebben az esetben, ezek a gráfok csak a töredékét teszik ki a nem 0-1 tulajdonságú páros gráfoknak.

Szeretnénk nagyobb csúcsszámú gráfokra is ellenőrizni a sejtés helyességét. Ezt pedig könnyen (polinomiálisan) ellenőrizhető szükséges vagy elégséges feltételek kidolgozásával és a programunkba beépítésével szeretnénk elérni.

Hivatkozások

[1] Dudek, A., & Wajc, D. (2011). *On the complexity of vertex-coloring edge-weightings.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 13(3), 45-50.

[2] Thomassen, C., Wu, Y., & Zhang, C. Q. (2016). *The 3-flow conjecture, factors modulo k, and the 1-2-3-conjecture.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 121, 308-325.

[3] Dezső, B., Jüttner, A.& Kovács, P. (2011). *LEMON – an Open Source C++ Graph Template Library.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 264(5), 23-45.

[4] IBM (2017) IBM ILOG CPLEX 12.7 *User's Manual* (IBM ILOG CPLEX Division, Incline Village, NV).

[5] https://hpc.iig.elte.hu