Bifurkációk szomitogenezist modellező rendszerekben

Önálló projekt II.

Készítette: Gyúró Noémi

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2021. december 3.

Tartalom

A kémiai reakció-diffúzió-rendszer

$$A \xrightarrow{k_1} R,$$
$$2A + B \xrightarrow{k_2} 3A,$$
$$B \underset{k'_{-3}}{\overset{k_3}{\leftrightharpoons}} R,$$

kémiai séma alapján (vö. A. Lemarchand B. Nowakowski, [5]):

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t[A] & = & d_A \Delta_{\mathbf{r}}[A] + f_1([A],[B]), \\ \partial_t[B] & = & d_B \Delta_{\mathbf{r}}[B] + f_2([A],[B]) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

A kinetikai differenciálegyenlet-rendszer

$$(1)$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} [\dot{A}] & = & f_1([A],[B]) :\equiv -k_1[A] + k_2[A]^2[B], \\ [\dot{B}] & = & f_2([A],[B]) :\equiv k'_{-3} - k_3[B] - k_2[A]^2[B] \end{array}\right\} \tag{2}$$

A, B : az adott kémiai anyagok,

$[\,.\,]$: anyag koncentrációja,

$\mathsf{k}_1, k_2, k_3, k'_{-3}$: pozitív állandók.

Áttekinthetőség

$$(A, B) := ([A], [B]), \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (k_1, k_2, k_3, k'_{-3})$$

jelölések bevezetésével

$$(1) \quad \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A} &= f_1(A, B) :\equiv -\alpha A + \beta A^2 B, \\ \dot{B} &= f_2(A, B) :\equiv \delta - \gamma B - \beta A^2 B \end{aligned}} \tag{3}$$

Fizikai relevancia

Tétel. (pozitivitás)

(3) *egyenlet* $A(0) > 0$, $B(0) > 0$ *kezdeti feltételnek eleget tévõ megoldásai* $t > 0$ *esetén is pozitívak maradnak.*

Tétel. (disszipativitás)

(3) *kinetikai rendszernek minden, a fázissík pozitív kvadránsában induló pályája az*

$$\Omega := \left\{ (A, B) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : \ \sigma(A, B) \leq \frac{k}{\mu} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \right\}$$

halmazba torkollik, ahol $k, \mu > 0$ *alkalmas állandó.*

Egyensúlyi helyzetek

Az $[A, B]$ fázissík pozitív kvadránsának határán egyetlen EH van:

$$\mathbf{E}_b := (0, \gamma/\delta)$$

A belsõ EH-k pedig:

$$B = \mathcal{N}_1(A) \quad \textit{és} \quad B = \mathcal{N}_2(A)$$

izoklinák metszéspontjában helyezkednek el, ahol $(A > 0)$

$$\mathcal{N}_1(A) := \frac{\alpha}{\beta A} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{N}_2(A) := \frac{\gamma}{\delta + \beta A^2}.$$

Egyensúlyi helyzetek

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \pi(A) := \alpha\beta A^2 - \beta\gamma A + \alpha\delta \qquad (A > 0)$$

Az egyensúlyi helyzet elsõ komponense a másodfokú polinom gyöke.

$$K := \beta\gamma^2 - 4\alpha^2\delta$$

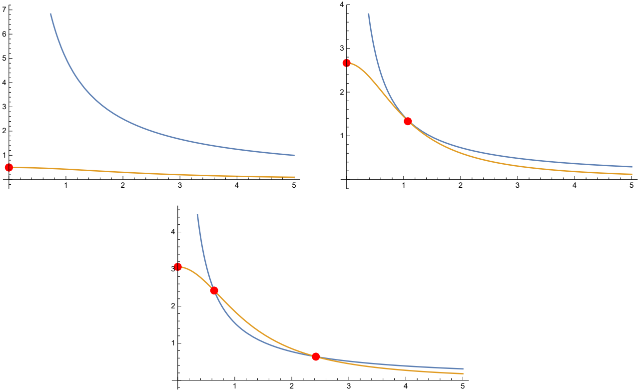
- $K < 0 \Rightarrow$ nincs belsõ egyensúlyi helyzet;
- $K = 0 \Rightarrow$ pontosan egy belsõ egyensúlyi helyzet van:

$$\overline{\mathbf{E}} := (\overline{A}, \overline{B}) := \left(\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\gamma}{2\delta}\right);$$

- $K > 0 \Rightarrow$ két belsõ egyensúlyi helyzet van: $\mathbf{E}_\pm := (A_\mp, B_\pm)$, ahol

$$A_\pm := \frac{\beta\gamma \pm \sqrt{\beta K}}{2\alpha\beta} \qquad \text{és} \qquad B_\pm := \frac{\alpha}{\delta} \cdot A_\pm.$$

Belső EH-k az izoklinák metszéspontjában



Az izoklinák $K < 0$, $K = 0$ és $K > 0$ esetben.

Egyensúlyi helyzetek stabilitása

Tétel.

1. $\mathbf{E}_b$: *lokálisan,* $K < 0$ *esetén pedig globálisan aszimptotikusan stabilis.*

2. $\overline{\mathbf{E}}$: *lehet stabilis meg labilis is.*

3. $\mathbf{E}_+$: *labilis.*

4. $\mathbf{E}_-$:

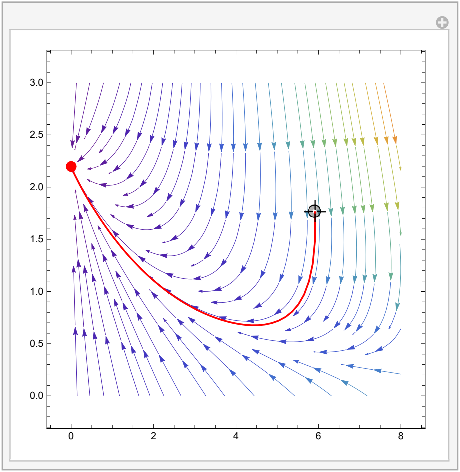
   4.1 *(lokálisan) aszimptotikusan stabilis, ha*

   $$2\alpha^3 < \gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma),$$

   4.2 *labilis, ha*

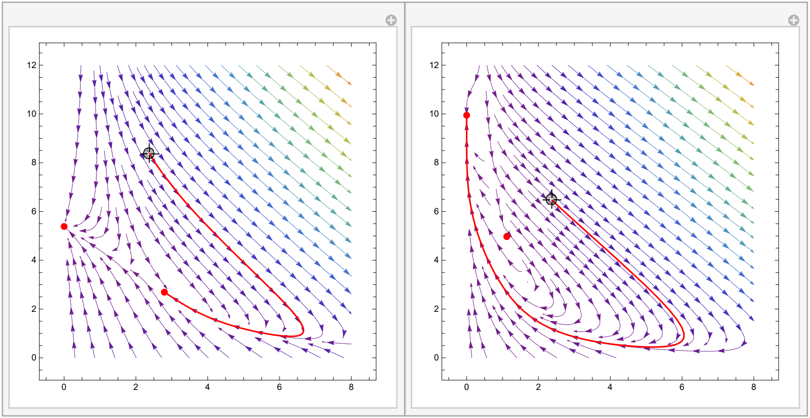
   $$2\alpha^3 > \gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma).$$

A rendszer fázisportréja



$K < 0$ esetben

A rendszer fázisportréja



$K = 0$ esetben: ($\overline{E}$ stabilis, ill. labilis).

Nyereg-csomó bifurkáció

$$K = 0 \quad \rightsquigarrow$$

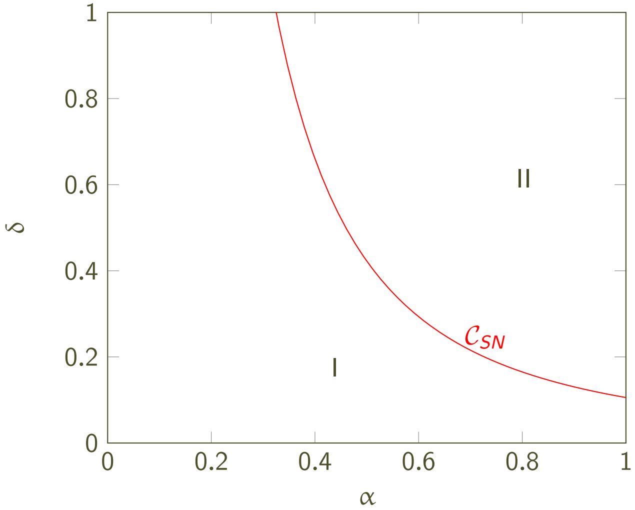
$$\mathcal{C}_{SN} := \left\{ (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2 : \ \delta = \frac{\beta\gamma^2}{4\alpha^2} \right\}$$

$$\mu_{SN} := \frac{4\alpha^2\delta}{\gamma^2}$$

Tétel. (Nyereg-csomó bifurkáció)

$\alpha \neq 2\delta$ *feltétel teljesülése esetén a* (3) *rendszerben a* $\beta = \mu_{SN}$ *kritikus értéknél szuperkritikus nyereg-csomó-bifurkáció lép fel.*

Nyereg-csomó bifurkációs görbe



Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció

$$\mathcal{C}_{PAH} := \left\{(\alpha,\delta) \in \mathbb{R}^2_+ : \ \mathrm{Tr}(J(\mathbf{E}_-) = 0\right\} = \left\{(\alpha,\delta) \in \mathbb{R}^2_+ : \ \delta = \frac{\alpha\beta\gamma^2 - \alpha^4}{\beta\gamma^2}\right\}$$

$$\mu_H := \frac{\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - \delta)}$$

Tétel.

Ha fennáll a $\alpha \leq \delta$ feltétel, akkor a (3) rendszernek nincsen nemtriviális periodikus megoldása.

Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció

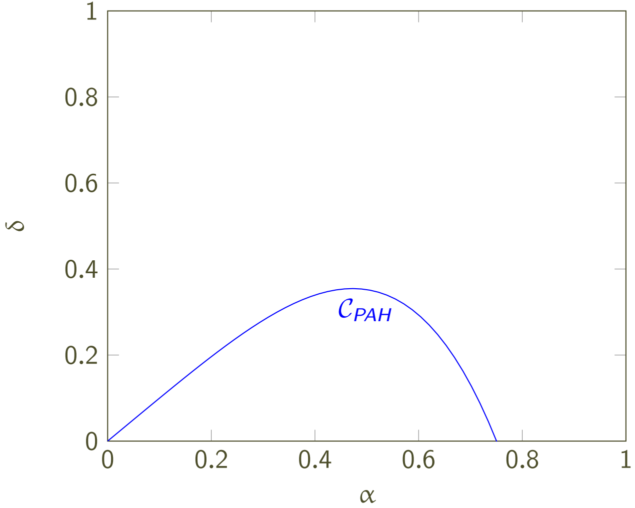
Tétel. (Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció)

Ha $K > 0$ *és* $\alpha > 2\delta$, *akkor a* $\beta = \mu_H$ *kritikus paraméterértéknél a* (3) *rendszer* $\mathbf{E}_-(\beta) = (A_+(\beta), B_-(\beta))$ *egyensúlyi helyzetéből határciklus bifurkálódik Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációval;a bifurkáció szuperkritikus, mivel az*

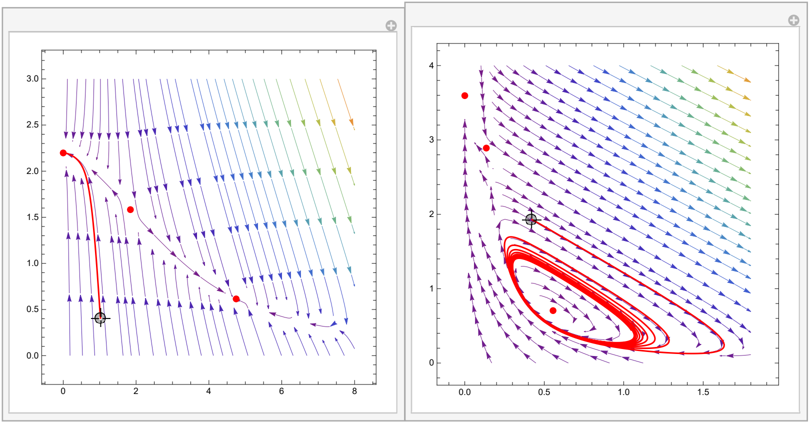
$$l_1 := \frac{\alpha^4}{2\omega\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} \cdot \left(-9\alpha^2 + 13\alpha\delta + 4\delta^2\right)$$

első Poincaré-Ljapunov együttható negatív

Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációs görbe

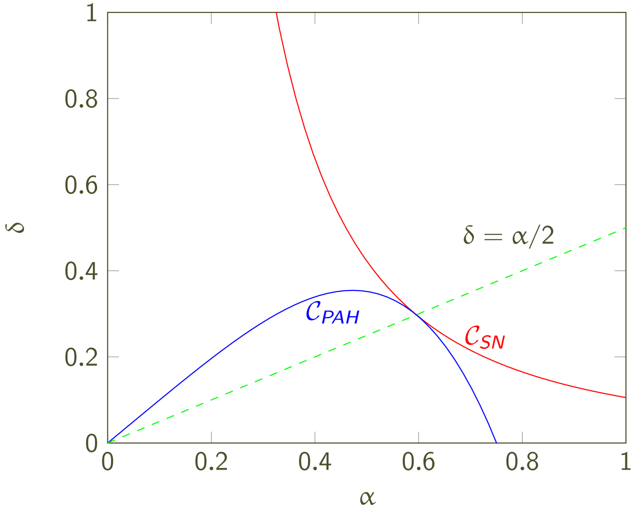


A (3) rendszer fázisportréja



$K > 0$ és $\beta < \mu_N$, ill. $\beta = \mu_H$ esetben.

Bogdanov-Takens-bifurkációs diagram



Bogdanov-Takens-bifurkáció

Tétel. (Bogdanov-Takens-bifurkáció)

A

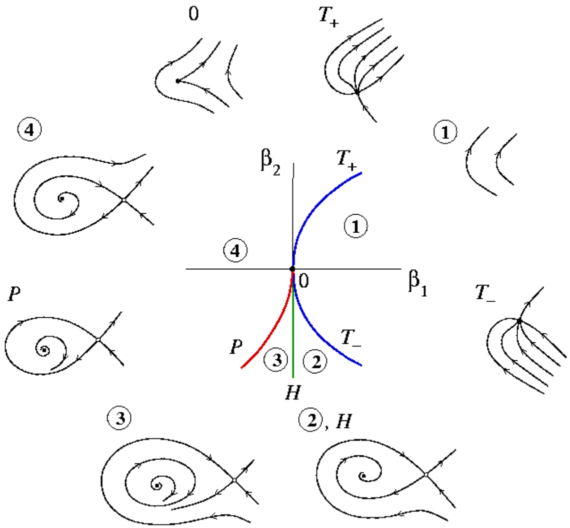
$$\beta := \gamma := 2\sqrt[3]{2}$$

feltétel teljesülése esetén a (3) *rendszernek a* $(\alpha, \delta) = (2, 1)$ *pár Bogdanov-Takens-bifurkációs pontja: a* (3) *rendszer topológiailag ekvivalens egy*

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\eta}_1 & = & \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 & = & \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\eta}\|^3) \end{array}\right\}$$

alakú rendszerrel

Bogdanov-Takens-bifurkáció



FARKAS, M.: *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.

KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *Oscillations in a System Modelling Somite Formation*, In: R. Mondaini (szerk.): Trends in Biomathematics: International Symposium on Mathematical and Computational Biology, (Springer 2022) (megjelenés alatt)

KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *Bifurcation analysis of a System Modelling Somite Formation*, SIAM J. Appl. Math. (benyújtva).

KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of applied bifurcation theory, Third edition*. Applied Mathematical Sciences, Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo: Springer-Verlag, 2004.

LEMARCHAND, A.; NOWAKOWSKI, B.: *Do the internal fluctuations blur or enhance axial segmentation?*, EPL, **94** (2011) 48004.

TAKENS, F.: *Forced oscillations and bifurcation*, Applications of global analysis, I (Sympos., Utrecht State Univ., Utrecht, 1973), 1–59. Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, **3** (1974), Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, Utrecht, 1974.