Piacok árazása matroidokkal adott kiértékelési függvények esetén

Önálló projekt előadás

Szögi Evelin,
Témavezetők: Bérczi Kristóf, Bérczi-Kovács Erika

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Kombinatorikus piacok

Piaci modell

S: **tárgyak** halmaza (oszthatatlan tárgyak)
T: **vásárlók** halmaza

Minden $t \in T$ vásárlóhoz tartozik egy **értékelőfüggvény**: $v_t : 2^S \to \mathbb{R}$

Például:

- $v_t(X) = \sum_{s \in X} v_t(s)$,
- $v_t(X) = r(X)$, ahol r egy matroid rangfüggvénye.

Árazási mechanizmusok

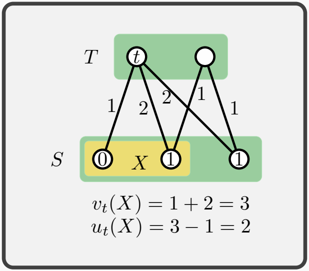
Eml.: Egy $t \in T$ vásárló értékelőfüggvénye $v_t : 2^S \to \mathbb{R}$.

Egy **árazási sémában (pricing scheme)** az eladó meghatározza minden $s \in S$ tárgynak a $p(s)$ árát.

$\Rightarrow$ Egy vásárló **hasznossága (utility)** egy $X \subseteq S$ tárgyhalmaz esetén

$$u_t(X) := v_t(X) - p(X),$$

ahol $p(X) := \sum_{s \in X} p(s)$.



Közjólét (Social welfare)

A tárgyak egy $\{S_t\}_{t \in T}$ allokációja mellett a **közjólét (social welfare)** értéke

$$\sum_{t \in T} v_t(S_t).$$

Cél: Adjunk olyan árazást, ahol minden vásárló úgy vásárol, hogy elérjük a közjólét maximális értékét.

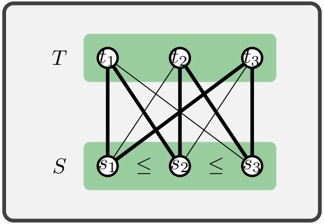
$\Rightarrow$ Bizonyos feltételek mellett ilyen allokációt hatékonyan tudunk találni.

Statikus árazás

- Statikus árazással nem érhető el közjólét optimumértéke 2/3-ánál jobb (Cohen-Addad et al., '16)

Feladat

- Vásárlók: t_1, t_2, t_3, tárgyak: s_1, s_2, s_3.
- $v_i(s_j) = 1$ ha $j = i, i+1$, különben 0.
- $v_i(X) = \max\{v_i(s) : \ s \in X\}$.



Legyen p egy tetszőleges árazás, $p(s_1) \leqslant p(s_2) \leqslant p(s_3)$ feltehető.

Megfigyelés Ha a vásárlók t_3, t_2, t_1 sorrendben érkeznek, akkor t_3 megveszi s_1-et és t_2 megveszi s_2-t. Így a közjólét értéke csak 2.

Dinamikus árazási sémák

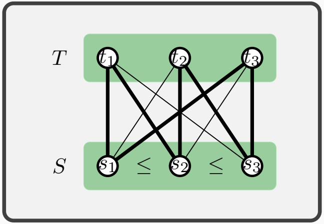
Megoldás

Változtassuk meg az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- az értékelőfüggvények ismertek,
- a vásárlók érkezési sorrendje ismeretlen.

Az árakat módosíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Minden fázisban állítsuk be úgy az árakat, hogy a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett a végső allokáció olyan legyen, ami eléri a közjólét maximális értékét.

Dinamikus árazási sémák

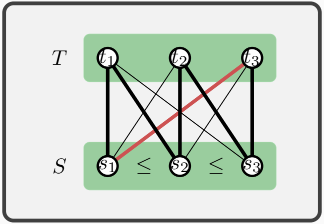
Megoldás

Változtassuk meg az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- az értékelőfüggvények ismertek,
- a vásárlók érkezési sorrendje ismeretlen.

Az árakat módosíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Minden fázisban állítsuk be úgy az árakat, hogy a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett a végső allokáció olyan legyen, ami eléri a közjólét maximális értékét.

Dinamikus árazási sémák

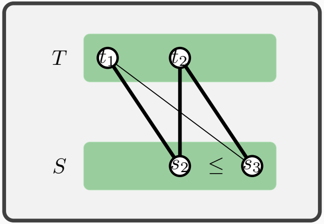
Megoldás

Változtassuk meg az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- az értékelőfüggvények ismertek,
- a vásárlók érkezési sorrendje ismeretlen.

Az árakat módosíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Minden fázisban állítsuk be úgy az árakat, hogy a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett a végső allokáció olyan legyen, ami eléri a közjólét maximális értékét.

Dinamikus árazási sémák

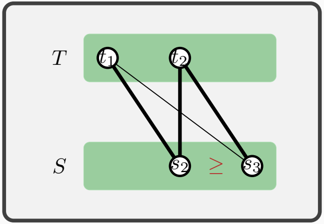
Megoldás

Változtassuk meg az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- az értékelőfüggvények ismertek,
- a vásárlók érkezési sorrendje ismeretlen.

Az árakat módosíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Minden fázisban állítsuk be úgy az árakat, hogy a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett a végső allokáció olyan legyen, ami eléri a közjólét maximális értékét.

Gross substitutes függvények

Egy $v : 2^S \to \mathbb{R}$ függvény **gross substitutes**, ha bármely $p, q \in \mathbb{R}^S$ árvektorra, ahol $q \geqslant p$, és bármely $X \in \arg\max_{Z \subseteq S}\{v(Z) - p(Z)\}$ esetén létezik $Y \in \arg\max_{Z \subseteq S}\{v(Z) - q(Z)\}$, melyre $\{x \in X : \; p(x) = q(x)\} \subseteq Y$.

- Közgazdaságtanban széles körben használt fogalom
- Piac szép tulajdonságokkal (pl. Walrasi egyensúly)

Fő nyitott kérdés

Gross substitutes értékelőfüggvények mellett van-e mindig olyan dinamikus árazás, amellyel elérhető a maximális közjólét?

Multi-demand értékelőfüggvény

Minden t vásárlóhoz tartozik egy $v_t : S \to \mathbb{R}_+$ értékelőfüggvény, mely minden egyes tárgyhoz rendel egy értéket, és egy $b(t)$ felső korlát a megvenni kívánt tárgyak számára. Ekkor

$$v_t(X) = \max\{v_t(X') : \ X' \subseteq X, |X'| \leqslant b(t)\}$$

multi-demand értékelőfüggvény.

Példák

- $b \equiv 1 \Rightarrow$ **unit-demand** vagy **matching** piac
- $b \equiv 2 \Rightarrow$ **bi-demand** piac

Korábbi eredmények:

- Unit-demand eset (Cohen-Addad et al., '16)
- Multi-demand eset legfeljebb 3 vásárlóval (Berger et al., '20)

Matroidok rangfüggvényei

Nagy lépés: matroidok rangfüggvényei

Fő nyitott kérdés

Gross substitutes értékelőfüggvények mellett van-e mindig olyan dinamikus árazás, amellyel elérhető a maximális közjólét?

$\Rightarrow$ Mi mondható el, ha a vásárlók értékelőfüggvényei súlyozott matroid rangfüggvények?

(Súlyozott) rang

A v_t értékelőfüggvény egy matroid (súlyozott) rangfüggvénye.

Egy X halmaz **rangja**

$$r(X) = \max\{|I| : \; I \subseteq X \text{ független}\}.$$

Adott $w : S \to \mathbb{R}$ súlyok mellett egy X halmaz **súlyozott rangja**

$$r_w(X) = \max\{w(I) : \; I \subseteq X \text{ független}\}.$$

Eml.: Multi-demand értékelőfüggvény:
$v_t(X) = \max\{v_t(X') : \; X' \subseteq X, |X'| \leqslant b(t)\}$.

$\Rightarrow$ Ez pontosan egy $b(t)$ rangú uniform matroid súlyozott rangfüggvénye.

Dütting és Végh sejtése

Nyitott kérdés

Ha az értékelőfüggvények (súlyozott) matroid rangfüggvények, akkor van-e mindig dinamikus árazás, amellyel elérhető az optimális közjólét?

Speciális eset

- Adott két vásárló matroid rangfüggvény értékelőfüggvénnyel.
- Feltesszük, hogy $S = B_1 \cupdot B_2$, ahol B_i bázis M_i-ben $(i = 1, 2)$. Ekvivalensen, az optimális közjólét $r_1(B_1) + r_2(B_2) = |S|$.

Dütting és Végh sejtése, '17

Létezik $p \in \mathbb{R}^S$ árvektor úgy, hogy

- bármely $B \in \arg\min\{r_1(X) - p(X) : \; X \in \mathcal{B}_1\}$ esetén $S - B \in \mathcal{B}_2$, és
- bármely $B \in \arg\min\{r_2(X) - p(X) : \; X \in \mathcal{B}_2\}$ esetén $S - B \in \mathcal{B}_1$.

Eredmények

Bérczi, Kakimura, Kobayashi, '20

A sejtés igaz két speciális esetben:

1. eset: Az egyik matroid partíciós matroid (a másik tetszőleges).

2. eset: Mindkét matroid SBO (strongly base orderable).

- Ilyenek például a lamináris, transzverzális matroidok, gammoidok

Új eredmény

Az új megközelítéssel be tudtuk látni a következőt:

Tétel (Bérczi, Bérczi-Kovács, Szögi, '21)

Ha minden vásárló értékelőfüggvénye egy 2-rangú matroid súlyozott rangfüggvénye, akkor létezik dinamikus árazás, mely eléri a közjólét optimális értékét, és az árazás polinomiális időben kiszámítható.

A tételt uniform matroidokra kimondva kapjuk a következő új eredményt:

Tétel (Bérczi, Bérczi-Kovács, Szögi, '21)

Minden bi-demand piacon létezik optimális dinamikus árazás és polinomiális időben kiszámítható.

Bi-demand eset

Bérczi, Bérczi-Kovács, Szögi, '21

Minden bi-demand piacon létezik optimális dinamikus árazás és polinomiális időben kiszámítható.

"Pontos élek" gráfjával dolgozunk (pontos él - szerepel valamilyen opt. megoldásban).

De: A pontos élek egyenként szerepelnek optimális megoldásban, de nem minden pontos élpár szerepel opt. megoldásban.

Bi-demand eset

Bérczi, Bérczi-Kovács, Szögi, '21

Minden bi-demand piacon létezik optimális dinamikus árazás és polinomiális időben kiszámítható.

A bizonyítás ötlete

- "Veszélyes" halmazok
- Kikeresztezést lehet alkalmazni
- Kisebb részekre bontható a feladat, indukciót tudunk alkalmazni

Új bizonyítás korábbi eredményekre

Az új, matroidokra vonatkozó eredményből következik az alábbi, korábban bebizonyított eredmény:

Cohen-Addad et al., '16

Unit-demand esetben létezik dinamikus árazás, mely eléri az optimális közjólétet, és polinomiális időben kiszámítható.

Az új, duális megközelítéssel új bizonyítás a korábbi tételre:

Berger et al., '20

Minden multi-demand piacon, legfeljebb 3 vásárló esetén létezik optimális dinamikus árazás, mely polinomiális időben kiszámítható.

- Sokkal rövidebb bizonyítás
- Több vásárlóra nem általánosítható

Köszönöm a figyelmet!