Párhuzamosított idődiszkretizáló módszerek

Kupás Vendel Péter

Témavezető
Dr. Fekete Imre

2021. december 16.

Idődiszkretizáló módszerek

$M \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{M+1}$ összefüggő nyílt halmaz, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^M)$.

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad a \leq t \leq b \\ u(a) &= u_0 \end{aligned}$$

- Felosztjuk az intervallumot N részre az $a = t_0 < t_1 < \cdot < t_{N-1} < t_N = b$ pontokkal.
- Az $U_0, U_1, \ldots, U_N$ értékekkel közelítjük a megoldás $t_0, t_1, \ldots, t_N$ helyen felvett értékeit.
- Runge–Kutta módszerek, többlépéses módszerek
- Cél: Olyan idődiszkretizáló módszer, ahol egyszerre több értéket tudunk kiszámolni.

Osztályozás

- **Párhuzamosítás a feladaton keresztül**
  A problémát több kisebb részproblémára bontjuk a komponensek szerint majd ezeken végzünk párhuzamosan számításokat.
- **Párhuzamosítás a lépéseken keresztül**
  Felosztjuk az idő intervallumot és egy lépésben az időtengely mentén több pontban végzünk számításokat egyszerre.
- **Párhuzamosítás a módszeren keresztül**
  Minden olyan módszer ide sorolható, ahol a módszerhez szükséges számításokat párhuzamosan tudjuk végezni.

A második osztályba sorolható.

Egy kezdetiérték probléma megoldása az egész intervallumon előáll úgy, mint az osztópontok által meghatározott részintervallumokon vett kezdetiérték problémák megoldásainak az egyesítése, ahol az U_i kezdetiérték a $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumon vett megoldás t_i helyen felvett értéke.

$$F(U) = \begin{pmatrix} U_0 - u_0(0) \\ U_1 - u_0(\frac{1}{3}, U_0) \\ U_2 - u_1(\frac{2}{3}, U_1) \\ U_3 - u_2(1, U_2) \end{pmatrix} = 0$$

Belövéses módszerek

$$U_0^{k+1} = u^0$$

$$U_{n+1}^{k+1} = u_n(t_{n+1}, U_n^k) + \partial_2 u_n(t_{n+1}, U_n^k)(U_n^{k+1} - U_n^k), \quad n = 0,1,..,N$$

A módszer továbbra is szekvenciális marad, de a költséges számításokat tudjuk párhuzamosan végezni.

A módszer akkor hatékony, ha sok processzor áll a rendelkezésünkre és kevesebb iterációt kell végrehajtanunk mint az osztópontok száma.

Ha a Newton-módszert használjuk, f disszipatív, a részintervallumokon a pontos megoldást elő tudjuk állítani és mindent pontosan ki tudunk számítani, akkor a konvergencia lokálisan kvadratikus lesz. Ha pedig egy megfelelő numerikus módszert használunk, akkor szuperlineáris.

Steffen-iteráció

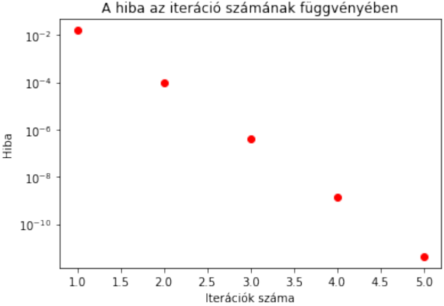
TOL	N	k^*	PFE	E_{1000}	Estimated E_{1000}	Speedup	$\frac{1000}{\text{PFE}}$
10^{-3}	50	22	64	1.1E–02	1.3E–02	12.4	15.6
	100	12	34	1.1E–02	1.3E–02	22.5	29.4
	200	7	19	1.0E–02	1.1E–02	38.4	52.6
	400	5	13	8.0E–03	7.6E–03	53.5	76.9
10^{-5}	50	30	81	6.5E–04	9.8E–04	9.7	12.3
	100	18	47	8.3E–04	1.1E–03	15.9	21.3
	200	11	28	5.5E–04	6.5E–04	25.6	35.7
	400	7	17	5.8E–04	6.0E–04	40.1	58.8
10^{-7}	50	43	121	9.0E–07	9.1E–07	6.5	8.3
	100	26	63	1.7E–06	1.7E–06	11.7	15.9
	200	16	38	3.3E–06	3.4E–06	18.5	26.3
	400	10	23	3.1E–06	3.1E–06	29.1	43.5

1. ábra. Eredmények

Parareal algoritmus

Egy egyszerűen számolható idődiszkretizációs módszer segítségével közelíti a Newton módszernél látott $\partial_{U_n} u_n(t_{n+1}, U_n^k)(U_n^{k+1} - U_n^k)$ értéket.

$$f(t,u) = -\frac{t+1}{t}u + 3te^{-t},\ \ u(1) = 1,\ \ 1 \le t \le 2$$



2. ábra

Hivatkozások

- M. GANDER, 50 Years of Time Parallel Time Integration, Multiple Shooting and Time Domain Decomposition Methods. Contributions in Mathematical and Computational Sciences, vol 9. Springer, Cham, pp. 69-113, 2015
- P. CHARTIER AND B. PHILIPPE, A parallel shooting technique for solving dissipative ODEs, Computing, 51 (1993), pp. 209–236.
- A. BELLEN AND M. ZENNARO, Parallel algorithms for initial-value problems for difference and differential equations, J. Comput. Appl. Math., 25 (1989), pp. 341–350.
- J.-L. LIONS, Y. MADAY, AND G. TURINICI, A parareal in time discretization of PDEs, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 332 (2001), pp. 661–668.