

Önálló projektfeladat - Kúpszeletek és alkalmazásaik

Fazekas Illés

December 9, 2021

A kúpszeletek, vagy másképp a másodrendű görbék kiemelt szereppel bírnak a geometriában, már az ókor óta tanulmányozzák őket. Szép tulajdonságokkal rendelkeznek, sok ezek közül nagyon jól hasznosítható. Az alábbiakban kitérünk a kúpszeletek egy ilyen tulajdonságára, majd bemutatjuk annak néhány gyakorlati alkalmazását is.

Kúpszeletek alternatív karakterizációja

A kúpszeleteknek van egy kevésbé ismert, de az eredetivel ekvivalens definíciója, ezt járjuk körül a következő szakaszban a parabolára és az ellipszisre vonatkoztatva. (Megjegyezzük, hogy ezen definícióknak van a hiperbolára vonatkozó megfelelője is, azonban hely szűkében azt nem tárgyaljuk.) Tekintsük az alábbi lemmákat:

Lemma 0.1 *Legyen v (mint vezéralakzat) egy kör G középponttal és r sugárral, F (mint fókusz) pedig egy pont a kör belsejében, ahol F nem esik egybe G -vel. Ekkor azon körök középpontjai, amelyek áthaladnak F -en, és érintik v -t, egy ellipszisen fekszenek, melynek fókuszpontjai F és G , nagytengelyének hossza pedig r .*

Bizonyítás Érintse az F -en áthaladó, P középpontú c kör v -t a T pontban (1. ábra). Ekkor a körök érintési tulajdonságai miatt T , P és G kollineárisak, emiatt érvényes az alábbi összefüggés:

$$r = TG = TP + PG = FP + PG.$$

Ezt figyelembe véve az ilyen tulajdonságú P pontok F -től és G -től mért távolságösszege állandó, ezzel adódik az állítás.

Lemma 0.2 *Legyen v egy egyenes, F pedig egy rá nem illeszkedő pont. Ekkor azon körök középpontjai, melyek áthaladnak F -en, és érintik v -t, parabolát alkotnak F fókuszponttal és v vezéregyenessel.*

Bizonyítás Megint csak érintse az F -en áthaladó, P középpontú c kör v -t a T pontban (2. ábra). Használva az érintési tulajdonságot, kapjuk, hogy $PT \perp v$. Eszerint P és v távolsága éppen PT , de $PT = PF$, mivel T és F rajta van c -n. Ezzel azt kaptuk, hogy az ilyen P pontok egyenlő távolságra vannak egy fix ponttól és egy fix egyenestől, azaz egy parabolán fekszenek.

A visszaverődési tulajdonság

A továbbiakban rátérünk a parabola és az ellipszis egy tulajdonságára, amely kapcsolatba hozza a fókuszpontokat az érintőkkel. Megjegyezzük, hogy a fentiekhez hasonlóan ez is kiterjeszthető a hiperbolára.

Tétel 0.3 Egy γ parabola vagy ellipszis tetszőleges P pontjában húzott érintő felezi a P -hez tartozó vezérsugarak szögét.

Bizonyítás Legyen γ egy ellipszis F fókuszponttal és v vezérkörrel (3. ábra). Az előző ellipsziszre vonatkozó lemma értelmében a P középpontú, PF sugarú kör érinti v -t. Legyen ez a T pont. Legyen továbbá b a $\angle TPF$ szög szögfelezője, K pedig egy tetszőleges, P -től különböző pont b -n. Mivel K a szögfelezőn fekszik, $KT = KF$. Emiatt a K középpontú, KF sugarú kör (jelölje k) áthalad T -n is. Azonban T illeszkedik v -re, és $P \neq K$, ezért k nem érintheti v -t, ami implikálja, hogy K nem fekehet γ -n. Azt kaptuk, hogy az ellipszisnek a szögfelezővel nem lehet P -n kívül más közös pontja, azaz a meghúzott érintő egyben szögfelező is.

Legyen γ parabola F fókusszal és v vezéregyenessel (4. ábra). Újra a fenti jelöléseket használva a fenti érvelés átvihető a parabola esetére is, így kapjuk, hogy a vezérsugarak szögfelezőjének a parabolával egy közös pontja van, ugyanakkor ez még nem feltétlenül jelent érintést, ugyanis b lehetne párhuzamos a parabola tengelyével, így szintén csak egy közös pontja lenne vele. Azonban meggondolható, hogy ez nem fordulhat elő, hiszen ekkor PT párhuzamos lenne a parabola tengelyével, a PT és PF egyenesek egybeesnének, ami azt implikálná, hogy a fókusz illeszkedik a vezéregyenesre.

Megjegyezzük, hogy ha kilépünk a valós projektív síkra, a parabola végtelen távoli pontja bizonyos értelemben megfeleltethető fókuszának. Ezt és a fent bizonyítottakat egybevetve a hullám-visszaverődési törvénnyel, miszerint egy fénysugár vagy más hullám úgy verődik vissza egy felületről annak egy adott pontjában, hogy a beesés és a visszaverődés szöge az azon pontbeli érintőhöz képest megegyezik, adódik, hogy egy ellipszis vagy parabola egyik fókuszán keresztül érkező hullámok visszaverődés után áthaladnak a másik fókuszon is. (Parabola esetében ez azt jelenti, hogy a parabola tengelyével párhuzamosan érkező hullámok keresztülhaladnak a fókuszon, és fordítva.)

Alkalmazások

A parabola reflektív tulajdonságát használják a parabolaantennák, ahol az axiálisan érkező műholdas jelek visszaverődés után a parabola fókuszpontjában elhelyezett vevőegységen koncentrálódnak, így kisebb mértékű jelerősítésre és felületre van szükség a jel vételéhez. Ugyanezen elven gyűjti össze a helyszíni titkosszolgálati megfigyelésekhez használt, távoli célpontra irányított parabolamikrofon a hanghullámokat is. Fordítva, a parabolatükör a fókuszról érkező hullámok axiális szétszórására is alkalmas, ezt használja az autók fényszórója, melynél a fényforrás egy paraboloid alakú foncsor gyűjtőpontjában helyezkedik el, és a fénysugarakat a haladási irányának megfelelően továbbítja.

Megemlítjük továbbá az ellipszis egy fontos alkalmazását is, az ún. lithotriptert, ami egy vesekövek szétzúzására kifejlesztett, mechanikai rezgéseket használó nem-invazív orvosi eszköz. Ez egy ellipszoidszelet alakú eszköz, amit a páciens oldalára helyeznek oly módon, hogy a megcélzott vesekő legyen az egyik fókuszpontjában. A kő széttöréséhez használt mechanikai rezgéseket, ha közvetlenül a kő irányába küldenék, kárt okozhatna a szövetekben, azonban ha azokat minden irányba elengedik az ellipszoid külső fókuszpontjából, azok eloszlanak, a kisebb energiájú rezgések nem okoznak kárt, az ellipszoid felületéről visszaverődnek, és koncentrálódnak a másik fókuszban, ahol kifejtik hatásukat a vesekövön, majd a porrá zúzott kődarabok természetes úton távoznak a szervezetből, ezzel csökkentve a műtéttel járó kockázatokat és kellemetlenségeket.

Ábrák

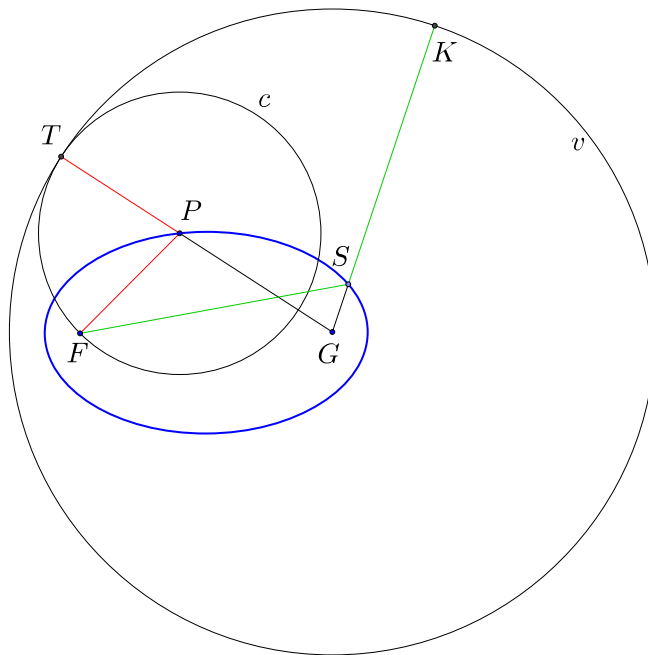


Figure 1: Ellipszis és vezérköre

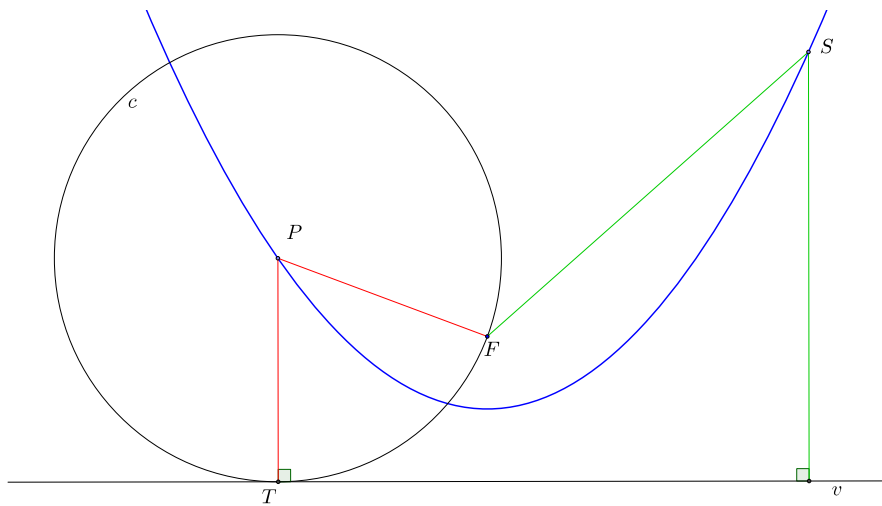


Figure 2: Parabola és vezéregyenes

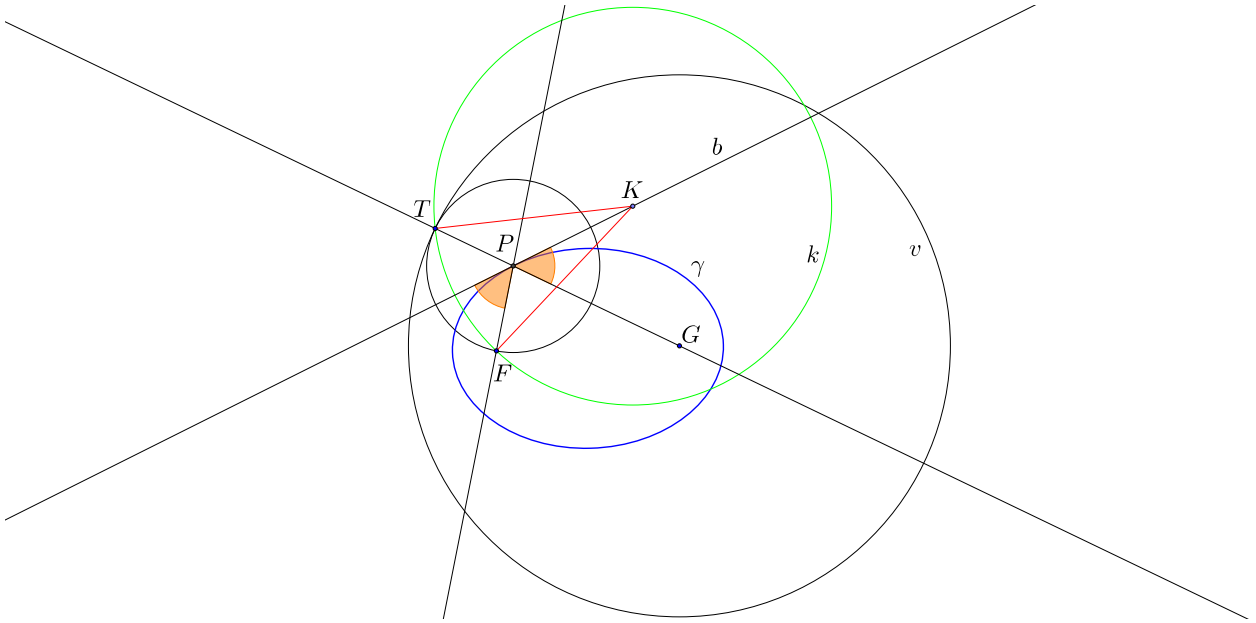


Figure 3: Ellipszis érintője

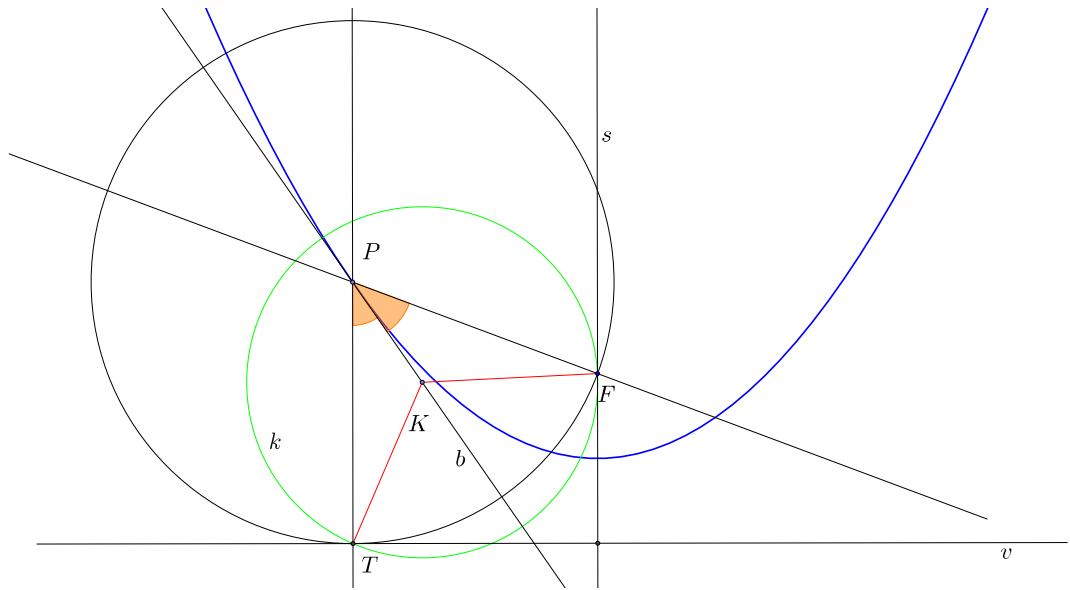


Figure 4: Parabola érintője