

Önálló projektfeladat I. - Kúpszeletek és alkalmazásai

Fazekas Illés

Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Kiss György

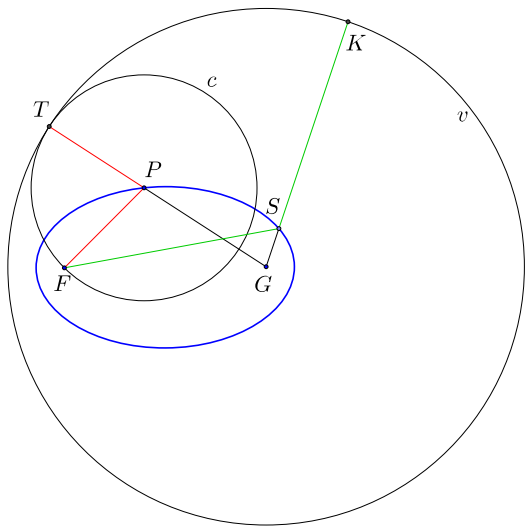
Projektünk célja a kúpszeletek néhány fontos tulajdonságának tanulmányozása, az ide vonatkozó állítások bizonyítása, és kitekintés való életbeli alkalmazásokra.

Az alábbiakban ismertetjük az ellipszis egy tulajdonságát, amely a hullám-visszaverődés révén kulcsfontosságú alkalmazások terén. Megjegyezzük még, hogy ugyanezen tulajdonságok a parabolára és a hiperbolára is átvihetők.

Ehhez tekintsük a következő lemmát, ami az ellipszis egy kevésbé ismert, de ekvivalens karakterizációját adja vezéralakzat segítségével:

Lemma

Legyen v (mint vezéralakzat) egy kör G középponttal és r sugárral, F (mint fókusz) pedig egy pont a kör belsejében, ahol F nem esik egybe G -vel. Ekkor azon körök középpontjai, amelyek áthaladnak F -en, és érintik v -t, egy ellipszisen fekszenek, melynek fókuszpontjai F és G , nagytengelyének hossza pedig r .



Bizonyítás.

Érintse az F -en áthaladó, P középpontú c kör v -t a T pontban. Ekkor a körök érintési tulajdonságai miatt T , P és G kollineárisak, emiatt érvényes az alábbi összefüggés:

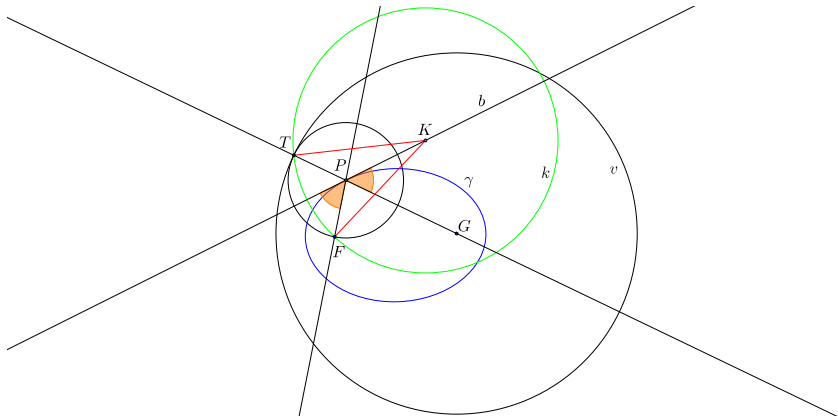
$$r = TG = TP + PG = FP + PG.$$

Ezt figyelembe véve az ilyen tulajdonságú P pontok F -től és G -től mért távolságösszege állandó, ezzel adódik az állítás. \square

A fenti lemmára építve kapunk egy állítást, amely kapcsolatba hozza a fókuszpontokat az érintőkkel az alábbi módon:

Tétel

Egy γ ellipszis tetszőleges P pontjában húzott érintő felezi a P -hez tartozó vezérsugarak szögét.



Bizonyítás.

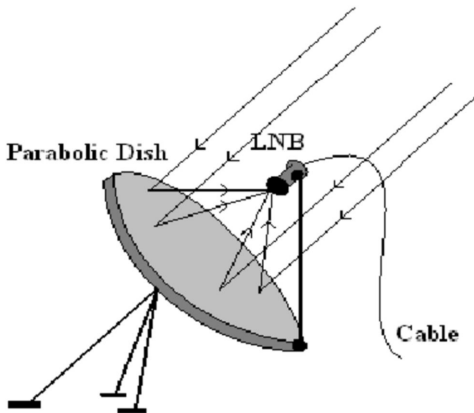
Legyen γ egy ellipszis F fókuszponttal és v vezérkörrel. Az előző lemma értelmében a P középpontú, PF sugarú kör érinti v -t. Legyen T az érintési pont. Legyen továbbá b a $\angle TPF$ szög szögfelezője, K pedig egy tetszőleges, P -től különböző pont b -n. Mivel K a szögfelezőn fekszik, $KT = KF$. Emiatt a K középpontú, KF sugarú kör (jelölje k) áthalad T -n is. Azonban T illeszkedik v -re, és $P \neq K$, ezért k nem érintheti v -t, ami implicálja, hogy K nem feket γ -n. Azt kaptuk, hogy az ellipszisnek a szögfelezővel nem lehet P -n kívül más közös pontja, azaz a meghúzott érintő egyben szögfelező is. □

Tudjuk:

- A hullám-visszaverődési törvény értelmében egy hullámnak egy adott pontban az érintőhöz képest vett beesési és visszaverődési szöge megegyezik
- A fókuszban vett érintő felezi a vezérsugarak szögét

Következmény: Az ellipszis egyik fókuszán áthaladó hullám visszaverődés után a másik fókuszon halad keresztül.

A fentiek parabolára is igazak: a tengellyel párhuzamosan (azaz a végtelen távoli fókuszon keresztül) érkező hullámok reflexió után áthaladnak a parabola fókuszán. Ezt használja a parabolaantenna:



Egy további alkalmazás a lithotripter, egy vesekövek szétzúzására használt ellipszoid alakú nem-invazív orvosi eszköz.

Működése: az ellipszoid egyik fókuszából több irányba mechanikai rezgéseket küldünk, azok eloszlanak, nem károsítva a szöveteket, majd visszaverődés után a másik fókuszban koncentrálódnak, ahol széttörik a veseköveket.

