Újszerű párosítás feladatok

Önálló projekt I.
Beszámoló

Tóth Sára Hanna
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:
Madarasi Péter
ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2021

1. Bevezetés

Az Önálló projekt tárgy keretei között a félévben megszorított párosítás feladatokkal foglalkoztam. Már a BSc szakdolgozatom középpontjában is ez a témakör állt, ennek köszönhetően pedig a félévben egy TDK dolgozat is született az eddigi eredményekből. A vizsgált feladatok bemutatása után ezeket az eredményeket vázolom az alábbi beszámolóban.

2. A vizsgált feladatok

Feleltessük meg egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S csúcsait egymást követő egész napos eseményeknek, T csúcsait biztonsági őröknek. Egy s nap és egy t őr között él megy, ha t beosztható az s napra. A feladat minél több naphoz hozzárendelni egy-egy őrt, ügyelve arra, hogy valamennyi őr minden egymást követő d napon legfeljebb egyszer dolgozhat. Ekkor egy megengedett beosztás a következő élhalmaznak felel meg [1]:

2.1. Definíció (d-távolságú párosítás)**.** *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt d-távolságú párosításnak (d-distance matching) nevezünk, ha az S-beli csúcsok foka M-ben legfeljebb* 1*, és minden $t \in T$-re, ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d$ teljesül.*

A maximális súlyú d-távolságú párosítás feladatban adott egy $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, és olyan M d-távolságú párosítást keresünk, amelynek az összsúlya, azaz $w(M) = \sum_{e \in M} w_e$ maximális. A probléma a [2]-ben tárgyalt szimultán hozzárendelési feladat (simultaneous assignment problem) egy speciális esete, de megfogalmazható frekvencia kiosztási feladatként (frequency assignment problem) is, amely egy széles körben kutatott problémakör [3].

A feladat egy másik változata a ciklikus d-távolságú párosítás probléma, amely annyiban különbözik a fent definiált változattól, hogy az S csúcsait ciklikus sorrendben vesszük, tehát ekkor a fentiek mellett még az $|i - j| \leq |S| - d$ feltételnek is teljesülnie kell minden $s_i t, s_j t \in M$-re.

Mindkét problémát általánosíthatjuk úgy, hogy az inputban adott még a $b_S : S \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ fokszámkorlát függvény is, és olyan élhalmazt keresünk, amelyben minden $s \in S$ csúcs foka legfeljebb $b_S(s)$ lehet, valamint teljesíti a fenti távolságfeltételeket is. Ez a (ciklikus) d-távolságú b_S-párosítás feladat.

3. Eredmények

Az önálló projekt keretei között főként a d-távolságú párosítás feladattal foglalkoztunk. A két fő kutatási irány az egészértékűségi hézaggal, valamint az optimális permutációkkal kapcsolatos kérdések voltak.

Bebizonyítottuk az alábbi felső becslést a d-távolságú párosítás feladatra vonatkozó egészértékűségi hézagra:

3.1. Tétel. *A maximális súlyú d-távolságú párosítás probléma bármely példányára felírt IP feladatra és annak LP relaxáltjára*

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} \leq 2 - \frac{2}{d}.$$

Melyből az is következik, hogy $d = 2$ esetben a természetes IP modell relaxáltjához tartozó poliéder egész, így polinomiális időben megoldható a feladat. A tétel bizonyításából egy $\left(2 - \frac{2}{d}\right)$-közelítő algoritmus is adódik.

Bebizonyítottuk továbbá, hogy a $2 - \frac{1}{d}$ egy éles felső becslés a ciklikus változatra vonatkozó egészértékűségi hézagra abban az esetben, ha $(2d - 1)$ osztója az S elemszámának.

Azt a kérdést is vizsgáltuk, hogy meg tudjuk-e adni egy inputként kapott élsúlyozott páros gráf és d szám esetén az S halmaz csúcsainak egy olyan permutációját, amelyre a maximális súlyú d-távolságú b_S-párosítás a lehető legnagyobb. Beláttuk, hogy a $b_S \equiv 1$ esetben a feladatot polinom időben meg tudjuk oldani a ciklikus és a nem ciklikus esetben is. Azt is bebizonyítottuk, hogy $b_S \geq 2$-re mindkét feladat nehézzé válik.

4. További tervek

A témakörben még számos érdekes nyitott kérdés van, amelyekkel tovább szeretnénk haladni a következő félévekben.

Vizsgálhatjuk tovább az egészértékűségi hézag becslését a d-távolságú párosítás feladatok kapcsán. A ciklikus változatban érdemes lenne (lehetőleg éles) becsléseket bizonyítani a $(2d-1) \nmid n$ esetekre is, a nem ciklikus változatra pedig javíthatnánk tovább a felső korlátot. Legjobban persze itt is egy éles becslést szeretnénk.

Egy új kérdéskör a d-távolságú párosítás feladatra, hogy – az approximációs algoritmusokkal ellentétben – nem olyan élhalmazt keresünk, amely az optimálisnál nem sokkal kisebb súlyú, de megengedett, hanem olyat, amely legalább olyan súlyos mint az optimum, de egy kicsit sértheti a feltételeket. Például a mi esetünkben megengedjük, hogy d-nél valamivel kisebb távolságok lépjenek fel T-beli csúcsok szomszédai között, de cserébe elvárjuk, hogy a kapott élhalmaz súlya elérje az eredeti optimumot.

Egy másik érdekes felmerülő kérdés, hogy olyan teljes (S halmazt fedő) d-távolságú párosítást keresünk, amelyben a T-beli fedetlen csúcsok száma maximális. A biztonsági őrös példában ez annak felel meg, hogy minél kevesebb őrt szeretnénk foglalkoztatni úgy, hogy még az összes munka el legyen végezve.

Hivatkozások

[1] Péter Madarasi. Matchings under distance constraints I. *Ann Oper Res*, 2021, 305, 137–161.

[2] Péter Madarasi. The Simultaneous Assignment Problem. arXiv:2105.09439, 2021.

[3] Karen I. Aardal, Stan P. M. van Hoesel, Arie M. C. A. Koster, Carlo Mannino, Antonio Sassano. Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Ann Oper Res*, 153, 79–129, 2007.