

Újszerű párosítás feladatok

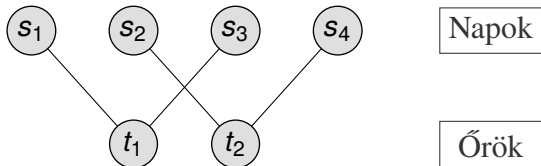
Tóth Sára Hanna

Témavezető:
Madarasi Péter

A d -távolságú párosítás feladat

Adottak s_1, \dots, s_n egymást követő egész napos események, és t_1, \dots, t_k őrök. Minden eseményhez adott az arra beosztható őrök listája.

Cél: rendeljünk minden eseményhez egy őröt úgy, hogy egyik őr sincs egynél többször beosztva semelyik d egymást követő napon!



A d -távolságú párosítás feladat

Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám, valamint $b_S : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ fokszámkorlát függvény.

Egy $M \subseteq E$ élhalmazt **d -távolságú b_S -párosításnak** nevezünk, ha minden $s \in S$ csúcs foka M -ben legfeljebb $b_S(s)$, és minden $t \in T$ -re, ha $s_it, s_jt \in M$, akkor $|i - j| \geq d$.

d -távolságú párosítás: $b_S \equiv 1$

Optimalizálási feladat: Adott $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény mellett keressünk egy maximális súlyú d -távolságú b_S -párosítást.

Egészértékűségi hézag

Egy felső becslés az egészértékűségi hézagra:

Tétel

A maximális súlyú d -távolságú párosítás probléma bármely példányára felírt IP feladatra és annak LP relaxáltjára

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} \leq 2 - \frac{2}{d}.$$

Következmények:

$d = 2$ esetben a poliéder egész

$\left(2 - \frac{2}{d}\right)$ -közelítő algoritmus

Egészértékűségi hézag

Hasonló ötlettel belátható:

Tétel

A maximális súlyú ciklikus d -távolságú párosítás problémára, ha $(2d - 1)$ osztója az S elemszámának, akkor a feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára

$$\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} \leq 2 - \frac{1}{d},$$

és ez a becslés éles.

Optimális permutáció keresése

Egy másik kérdés: adott $G = (S, T; E)$ páros gráfra, $d \in \mathbb{Z}_+$ számra, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre és $b_S : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ fokszámkorlát függvényre keressük az S csúcshalmaz csúcsainak egy olyan permutációját, amelyre a maximális súlyú d -távolságú b_S -párosítás a legnagyobb.

Tétel

Ha $b_S \equiv 1$, akkor az optimális permutáció polinom időben megtalálható.

A tételt a ciklikus esetre is beláttuk.

Optimális permutáció keresése

Az általánosítás is könnyű?

Tétel

Ha minden $s \in S$ -re $b_S(s) \geq 2$, akkor NP-nehéz megtalálni az optimális permutációt.

A tételt a ciklikus esetre is beláttuk.

Nyitott kérdések

- Mi az egészértékűségi hézag pontos értéke?
- Keressünk olyan megoldást, amely eléri az optimumot, cserébe kicsit sértheti a feltételeket.
- Minimalizáljuk az örök számát (szeretnénk minél többet kirúgni).
- (d_S, d_T) -távolságú b -párosítás:
 - ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d_S$ és
 - ha $s t_i, s t_j \in M$, akkor $|i - j| \geq d_T$ és
 - $\deg_M(v) \leq b(v)$ minden $v \in S \cup T$ -re.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!