Önálló projekt III.
Beszámoló

Gehér Panna

Euklideszi Ramsey elmélet

Témavezető: Tóth Géza

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2021-2022. I. félév

Bevezetés

A Ramsey elmélet nagy struktúrák elkerülhetetlen részstruktúráit vizsgáló tudományág. Klasszikus példa Ramsey típusú tételre a témakör nevét viselő Frank P. Ramsey gráfokra vonatkozó tétele: két színnel színezett kellően nagy csúcsszámú teljes gráf mindig tartalmaz adott méretű egyszínű teljes részgráfot. A tételt más és más kontextusba helyezhetjük: Gráfélek helyett színezhetünk más objektumokat, például részhalmazokat, számokat vagy éppen a sík pontjait. A keresett részstruktúrák ezen esetekben egyszínű részhalmazok, számsorozatok, illetve konfigurációk.
Az euklideszi Ramsey elmélet főleg az utóbbival, a geometriai vonatkozású kérdésekkel foglalkozik: Tipikus esetben az euklideszi sík, vagy magasabb dimenziós tér pontjait színezzük és egyszínű konfigurációkat keresünk. Az 1970-es években Erdős és társai háromrészes cikksorozatot [4] [5] [6] adtak ki, ezzel elindítva a szisztematikus vizsgálatokat.

A félév során két euklideszi Ramsey-típusú kérdéskört vizsgáltunk. Egyrészt a témakör központjában álló úgynevezett Ramsey halmazokkal foglalkoztunk. Tavaly azt vizsgáltuk, miképp lehet Minkowski terekre általánosítani a Ramsey halmaz fogalmát. Megmutattuk, minden 2 pontú halmaz, illetve minden szabályos szimplex erősen Ramsey. Meglepő módon ezen egyszerű állítások igazolásához is komoly tételek segítségére volt szükségünk.
Idén az l_p terek esetére tértünk ki. Kérdés, hogy az euklideszi esetben ismert tulajdonságok közül – a feltételek esetleges gyengítése mellett – melyek öröklődnek át az l_p–Ramsey halmazokra. Megmutatjuk, tetszőleges p esetén minden két pontú halmaz exponenciálisan l_p–Ramsey, illetve, hogy minden háromszög l_p–Ramsey. A nem l_2–Ramsey halmazok közül a legegyszerűbb példával foglalkoztunk: az $(1,1,2)$ oldalú elfajuló háromszög l_p–Ramsey tulajdonságait vizsgáltuk.

Másrészt a Hadwiger-Nelson probléma aszimmetrikus változatát is tovább vizsgáltuk: 1973-ban Erdősék vetették fel a következő kérdést: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében található vagy egységtávolságú piros pontpár, vagy K-val egybevágó kék konfiguráció? Egyszerű meggondolás alapján minden 3 vagy kevesebb pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket. Juhász [13] tétele azt állítja, hogy a 4 pontú konfigurációk is rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Kérdés, mi a helyzet a nagyobb pontszámú konfigurációkkal: A legjobb felső korlátot Csizmadia és Tóth [3] tétele adja, akik egy trükkös konstrukcióval 8 pontú ellenpéldát mutattak.
Az én feladatom annak vizsgálata volt, hogy miképp lehet Csizmadia és Tóth tételét Minkowski terekre általánosítani. Az előző félévben elsősorban egy egyszerűbb problémával foglalkoztunk: adott ponthalmaz eltoltjai között kerestünk egyszínűt. Azonban az izometrikus egyszínű példányok keresésénél nagyon érdekes nehézségekbe ütköztünk, idén ezt sikerült kiküszöbölni. Megmutatjuk, egy tetszőleges n dimenziós Minkowski térben létezik $\left(9+o(1)\right)^n$ pontú ellenpélda.

1. Ramsey halmazok

A Ramsey elméletet alapjaiban meghatározó gondolat 1930-ból származik:

1.1. Tétel (Ramsey [17]). *Minden $k < l$ és r értékekre létezik egy $R = R(l,k,r)$ szám, melyre teljesül, hogy r színnel színezve egy tetszőleges R elemű halmaz k elemű részhalmazait, mindig található egy l elemű részhalmaz, melynek minden k elemű részhalmaza azonos színű.*

Az euklideszi Ramsey elmélet a fenti tételben megjelenő szemléletet igyekszik a geometria területére átültetni. Tekintsünk például egy $r+1$ csúcsú szabályos szimplexet. A csúcsait tetszőlegesen színezve r színnel, mindig lesz azonos színnel rendelkező csúcspár. Vagyis minden r színszámra igaz, hogy egy r, vagy magasabb dimenziós euklideszi teret r színnel színezve elkerülhetetlen az azonos színű egységtávolságú pontpárt létrehozása.
A pontpár ezen tulajdonságát ragadja meg az úgynevezett Ramsey halmaz fogalma, melyet Erdősék vezették be cikksorozatukban:

1.1. Definíció (Ramsey halmaz). *Egy $X \subset \mathbb{R}^n$ véges halmazt Ramsey-nek nevezünk, ha minden $r \geq 2$ egészre létezik $n_0 = n_0(X,r)$, hogy $n \geq n_0$ esetén $\mathbb{R}^n$ tetszőleges r-színezésében található X-el egybevágó egyszínű halmaz.*

Az l_p normacsalád esetére szinte változtatás nélkül kiterjeszthetjük az eredeti definíciót:

1.2. Definíció (l_p–Ramsey halmaz). *Legyen $p \geq 1$ rögzített. Azt mondjuk, hogy egy X véges metrikus tér l_p–Ramsey, ha minden $r \geq 1$ egészre létezik $n_0 = n_0(X,r)$, hogy $n \geq n_0$ esetén $(\mathbb{R}^n, l_p)$ tetszőleges r-színezésében található X-el izometrikus egyszínű halmaz.*

Az egyértelműség kedvéért a továbbiakban a Ramsey halmazokat l_2–Ramsey halmaznak nevezzük. Kérdés, mely halmazok elégítik ki az l_2–Ramsey feltételt, illetve, hogy mely tulajdonságok őrződnek meg a többi l_p térben. Triviálisan tetszőleges p esetén minden 1 pontú halmaz l_p–Ramsey. A fenti gondolatmenet alapján az is egyszerűen látszik, hogy tetszőleges p-re minden egységtávolságú pontpár, illetve minden szabályos szimplex l_p–Ramsey. Sőt, a 2 pontú halmazok ennél erősebb feltételeket is teljesítenek:

1.3. Definíció (Exponenciálisan l_p–Ramsey). *Legyen p rögzített. Egy $X \subset \mathbb{R}^n$ halmaz exponenciálisan l_p–Ramsey, ha létezik $\epsilon = \epsilon(X) > 0$, hogy $m \geq n$ és $r < (\epsilon+1)^m$ esetén $(\mathbb{R}^m, l_p)$ minden r-színezésében található X-el izometrikus egyszínű halmaz.*

A 2 pontú halmazok exponenciális l_2–Ramsey tulajdonsága egybeesik a tér kromatikus számának exponenciális növekedésével. Ezt hosszú idő után Frankl és Wilson halmazrendszerek segítségével igazolták:

1.2. Tétel (Frankl-Wilson [10]). $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \left(1.2 + o(1)\right)^n$

Bizonyítás. (Vázlat)

Legyen q tetszőleges szám. Tekintsük az n dimenziós tér azon pontjait, melyeknek koordinátái közt $(2q-1)$ helyen áll $1/\sqrt{2q}$, a többi koordináta pedig 0. Egy v ponthoz definiáljuk az $F(v) := \{i | x_i \neq 0\}$ halmazt. Ekkor v_1, v_2 pontok távolsága pontosan akkor 1, ha $F(v_1)$ és $F(v_2)$ metszete $(q-1)$ elemű. Így átfogalmazhatjuk a feladatot a következőképp: Maximum hány $F(v)$ halmazt válaszhatunk ki úgy, hogy egyik halmazpárnak se legyen a metszete $(q-1)$ elemű? Frank és Wilson belátták, hogy ha q prímhatvány, akkor $\binom{n}{q-1}$ halmaznál nem választhatunk többet, tehát:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{q \text{ prímhatvány}} \frac{\binom{n}{2q-1}}{\binom{n}{q-1}}$$

Megfelelően választva q értékét $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.2 + o(1))^n$ adódik. □

Egyszerű megfigyelés, hogy az 1.2. tételben bemutatott konstrukció a permutáció-invariáns normákra, így az l_p normákra is megfelelő, azaz tetszőleges p esetén minden 2 pontú metrikus tér exponenciálisan l_p–Ramsey. (Egy normát akkor nevezünk permutáció-invariánsnak, ha minden $\sigma : \{1,\dots n\} \to \{1,\dots n\}$ permutációra $\|(x_1,\dots x_n)\| = \|(x_{\sigma(1)},\dots x_{\sigma(n)}\|$ teljesül.)

A következő kérdés, hogy mit mondhatunk a háromszögről. Ennek vizsgálatához szükségünk lesz a következő tételre, mely fontos tulajdonságát írja az l_2–Ramsey halmazoknak:

1.3. Tétel (Szorzás-tétel [4])**.** *Legyenek $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ és $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ l_2–Ramsey halmazok.*
Ekkor $K_1 \times K_2 := \{(x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_m) \mid (x_1,\dots x_n) \in K_1, (y_1,\dots y_m) \in K_2\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ is l_2–Ramsey.

A tétel közvetlen következménye, hogy minden 2 elemű halmaz szorzata, azaz egy tégla csúcshalmaza rendelkezik az l_2–Ramsey tulajdonsággal.
Egy l_2–Ramsey halmaz minden részhalmaza is l_2–Ramsey, így ha X egy tégla részhalmaza, akkor X is l_2–Ramsey. Ebből azonnal adódik, hogy például a derékszögű háromszögek l_2–Ramsey halmazok, hiszen egyetlen pont hozzávételével kiegészíthetőek téglalappá. Kérdés, milyen halmazokra igaz még, hogy pontjaik egy téglatest csúcsainak részhalmazát alkotják. Álljon $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n+1)$ általános helyzetű pontból. Ahhoz, hogy X pontjai kiegészíthetőek legyenek egy tégla csúcshalmazává, egy szükséges feltétel, hogy X semelyik 3 pontja se határozzon meg derékszögnél nagyobb szöget. Ez a feltétel $n \leq 3$ esetben elégségesnek is bizonyul, így a derékszögű háromszögek mellett minden hegyesszögű háromszög is l_2–Ramsey. Mi a helyzet a tompaszögű háromszögekkel? A kérdést Frankl és Rödl válaszolták meg:

1.4. Tétel (Frankl-Rödl [8])**.** *Minden háromszög l_2–Ramsey.*

Bizonyítás. (Vázlat)

Először az 1.1 Ramsey-tétel segítségével megmutatjuk, hogy minden $t > 0$ számra a $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$, $\sqrt{8t-6}$ oldalú háromszög l_2–Ramsey:

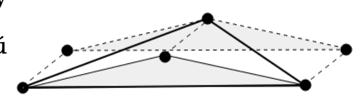
Legyen $n = R(2t+1, 2t-1, r)$, azaz n-et olyan nagynak választjuk, hogy egy n elemű halmaz $(2t-1)$ elemű részhalmazain definiált tetszőleges $r-$színezés tartalmaz egyszínű $(2t+1)$ elemű egyszínű részhalmazt. Tekintsük $\mathbb{R}^n$ azon pontjait, melyeknek koordinátái $2t-1$ helyet leszámítva 0, a maradék helyeken pedig $1, 2, \dots t, t-1, \dots 1$, ebben a sorrendben. Ezen pontok $r-$ színezése meghatározza az $[n] = \{1, \dots n\}$ halmaz $(2t-1)$ elemű részhalmazainak egy $r-$színezését. Az n választása alapján létezik egy $(2t+1)$ elemű S halmaz, melynek minden $2t-1$ elemű részhalmaza azonos színű. Válasszuk ki S 3 részhalmazát úgy, hogy a hozzájuk tartozó A, B, C pontok nem 0 koordinátái B-ben eggyel jobbrább legyenek mint A-ban, és eggyel balrább legyenek mint C-ben. Például $t = 4$-re A, B, C a következő alakú:

$$A = \{\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \dots\}$$

$$B = \{\dots 0 \dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots 0 \dots\}$$

$$C = \{\dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots\}$$

Így A, B, C pontok egyszínűek, A és B, illetve B és C távolsága $\sqrt{2t}$, még A és C távolsága $\sqrt{8t-6}$. A t értékét növelve a két rövidebb oldal által bezárt szög nő, azaz megfelelően nagy t választása esetén egy tetszőlegesen lapos háromszöget kapunk. Minden egyenlőszárú háromszög esetén megválaszthatjuk t értékét úgy, hogy a háromszög beágyazható legyen egy $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$, $\sqrt{8t-6}$ oldalúarányú háromszög és egy megfelelő hosszú intervallum szorzataként előálló hasábba. Így az 1.3. Szorzás tétel alapján minden egyenlőszárú háromszög l_2-Ramsey. A Szorzás tétel újbóli alkalmazásával az egyik csúcsot tovább elemelve tetszőleges egyszínű háromszöget előállíthatunk, amiből a tétel következik. □



Mi a helyzet a háromszögekkel a többi l_p térben? Néhány speciális esettel kezdjük:
Azt mondjuk, hogy az $\{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz hegyesszögű háromszög l_p-ben, ha $\|x_1 - x_2\|^p + \|x_2 - x_3\|^p > \|x_1 - x_3\|^p$, illetve derékszögű l_p-ben, ha $\|x_1 - x_2\|^p + \|x_2 - x_3\|^p = \|x_1 - x_3\|^p$.

1.5. Tétel (Sagdeev [19])**.** *Legyen p rögzített. Ekkor minden l_p-ben hegyesszögű és l_p-ben derékszögű háromszög exponenciálisan l_p-Ramsey.*

Megmutatjuk, Frankl és Rödl 1.4. tétele általánosítható l_p terekre:

1.6. Tétel. *Tetszőleges p esetén minden háromszög l_p-Ramsey.*

Bizonyítás. (Vázlat)
Az euklideszi esethez hasonlóan egy nagyon lapos háromszögből indulunk ki: Frankl és Rödl bizonyítását követve minden p-re a $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}$ oldalú háromszögek l_p-Ramsey halmazok. A t értékét növelve a két rövidebb oldalhosszának összege tart a harmadik oldal hosszához, azaz megfelelően nagy t választása mellett tetszőlegesen lapos háromszöget állíthatunk elő.
A következő két lépésben az 1.3. Szorzás tételhez hasonlóan járunk el: egy $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}$

oldalú háromszög két, illetve a 2. lépésben további 1 csúcsának koordinátáit kiegészítjük úgy, hogy tetszőleges egyszínű háromszöget kapjunk. Legyenek N_1, N_2 és N_3 egészek, melyek értékeit később határozzuk meg. Tekintsük az $n = N_1 + N_2 + N_3$ dimenziós pontok közül a következő alakúakat:

- az első N_1 koordináta $2t-1$ helyet leszámítva 0, a maradék helyeken ϵ, $2\epsilon, \dots t\epsilon$, $(t-1)\epsilon, \dots \epsilon$, ebben a sorrendben, ahol $\epsilon > 0$
- a következő N_2 koordináta közül 1 értéke nem 0, a maradék koordináta pedig egy α szám
- az utolsó N_3 koordináta közül pedig 1 értéke nem 0, a maradék koordináta pedig egy β szám

Az n-dimenziós tér $r-$színezése meghatározza az $[N_1]$ halmaz $(2t-1)$ elemű részhalmazainak $r^{N_2 \cdot N_3}-$színezését. Így N_1 értékét $N_1 = R\big(2t+1, 2t-1, r^{N_2 \cdot N_3}\big)$-nek választva lesz $2t+1$ elemű részhalmaza, melynek minden $(2t-1)$ elemű részhalmaza azonos színű. Az első N_1 koordináta színeit tekintsük rögzítettnek. Hasonlóan, a $N_2 + N_3$-dimenziós tér $r-$színezése meghatározza a $[N_2]$ halmaz $r^{N_3}-$színezését. Így $N_2 = R(2,1,r^{N_3}) = r^{r+1} + 1$ esetén lesz olyan 2 elemű részhalmaza, melynek elemei azonos színűek. Végül ugyanezen meggondolás alapján válasszuk N_3 értékét $R(2,1,r) = r+1$-nek.

Az n választása alapján kiválaszthatunk egyszínű A, B, C pontokat, melyek a következő alakúak:

$$A = \big\{\dots\epsilon\dots2\epsilon\dots3\epsilon\dots\dots t\epsilon\dots(t-1)\epsilon\dots\dots3\epsilon\dots2\epsilon\dots\epsilon\dots0\dots0\dots\big|\dots\alpha\dots0\dots\big|\dots\beta\dots0\dots\big\}$$
$$B = \big\{\dots0\dots\epsilon\dots2\epsilon\dots3\epsilon\dots\dots t\epsilon\dots(t-1)\epsilon\dots\dots3\epsilon\dots2\epsilon\dots\epsilon\dots0\dots\big|\dots0\dots\alpha\dots\big|\dots\beta\dots0\dots\big\}$$
$$C = \big\{\dots0\dots0\dots\epsilon\dots2\epsilon\dots3\epsilon\dots\dots t\epsilon\dots(t-1)\epsilon\dots\dots3\epsilon\dots2\epsilon\dots\epsilon\dots\big|\dots\alpha\dots0\dots\big|\dots0\dots\beta\dots\big\}$$

Megfelelően választva α, β és t értékét tetszőleges oldalhosszú háromszöget előállíthatunk a fenti módon, így valóban minden háromszög l_p-Ramsey. □

Megjegyezzük, csak kevés további példa ismert l_2-Ramsey halmazra: Kříž [14] tétele alapján minden szabályos sokszög, például a szabályos ötszög is l_2-Ramsey. Továbbá Frankl és Rödl [9] megmutatták, minden szimplex exponenciálisan l_2-Ramsey.
Azonban l_∞ normában lényegesen más a helyzet:

1.7. Tétel (Kupavskii-Sagdeev [15])**.** *Minden véges metrikus tér exponenciálisan $l_\infty-$Ramsey.*

Térjünk át a nem l_2-Ramsey halmazokra. Erdősék megmutatták, hogy ha egy konfiguráció nem gömbi, azaz pontjai nem egy gömb felszínén helyezkednek el, akkor nem l_2-Ramsey. A témakör leghíresebb sejtése szerint ennek fordítottja is igaz:

1.1. Sejtés (Graham [11])**.** *Egy véges halmaz pontosan akkor l_2-Ramsey, ha pontjai egy gömb felszínén helyezkednek el.*

A kérdés több mint 30 éve nyitva áll, ráadásul egy rivális sejtés is megjelent (Leader és társai [16]).

Az l_2 esetben a legegyszerűbb nem gömbi halmaz az $(1,1,2)$ oldalú elfajuló háromszög, a továbbiakban ezen halmaz l_p−Ramsey tulajdonságait vizsgáljuk. Ehhez először is tekinstük az euklideszi eset bizonyítását:

1.8. Állítás (Erdős és társai [4])**.** *Legyen X egy* $(1,1,2)$ *oldalú elfajuló háromszög. Ekkor X nem l_2−Ramsey.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy minden n-re $\mathbb{R}^n$ kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon egyszínű X-el egybevágó halmazt: Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe legyen $\lfloor \|x\|_2^2 \rfloor$ (modulo 4). Indirekt tegyük fel, hogy a színezés tartalmaz egyszínű X-el egybevágó halmazt, azaz valamely x-re, u-ra x, $x+u$ és $x-u$ ugyanazt a színt kapták, ahol $\|u\|_2 = 1$.

Ez azt jelenti, hogy léteznek a_1, a_2, a_3 egészek, egy $0 \le r < 4$ egész és θ_1, θ_2, θ_3 számok, melyre $0 \le \theta_i < 1$ teljesül ($i = 1, 2, 3$) úgy, hogy:

$$\|x\|_2^2 = 4a_1 + r + \theta_1 \tag{1}$$

$$\|x-u\|_2^2 = 4a_2 + r + \theta_2 \tag{2}$$

$$\|x+u\|_2^2 = 4a_3 + r + \theta_3 \tag{3}$$

Így: (2) − (1):

$-2\langle x,u\rangle + 1 = 4(a_2 - a_1) + \theta_2 - \theta_1$

(3) − (1):

$2\langle x,u\rangle + 1 = 4(a_3 - a_1) + \theta_3 - \theta_1$

Tehát:

$$0 = -2 + 4(a_3 + a_2 - 2a_1) + \theta_3 + \theta_2 - 2\theta_1$$

ami ellentmondás, hiszen a_1, a_2, a_3 egészek és $0 \le \theta_i < 1$.

□

Kérdés tehát, hogy a fenti bizonyítás miképp általánosítható l_p terekre. Legyen X egy l_p− $(1,1,2)$ háromszög. Azaz:

$$X = \{x_1, x_2, x_3 | \ \|x_1 - x_2\|_p = \|x_2 - x_3\|_p = 1, \|x_1 - x_3\|_p = 2\}$$

Kezdjük néhány speciális esettel: Egyrészt Kupavskii és Sagdeev 1.7. tétele alapján minden véges metrikus tér exponenciálisan l_∞−Ramsey. Másrészt Sagdeev 1.5. tétele alapján minden derékszögű háromszög exponenciálisan l_p−Ramsey. Mivel X derékszögű háromszög l_1-ben, így a fentiek alapján X exponenciálisan l_1 és l_∞− Ramsey.

Erdősék bizonyítását követve megmutatjuk, $1 < p < \infty$ esetén X nem exponenciálisan l_p–Ramsey: Ehhez elég minden n-re olyan színezést adni, melyben egyik színosztály sem tartalmaz X-el izometrikus halmazt és a színek száma csak lineárisan függ a dimenziószámtól.

Legyen $1 < p < \infty$ rögzített. Ekkor az egységgömb szigorúan konvex, tehát X minden euklideszi beágyazásban az x_1, x_2, x_3 pontok egy egyenesre esnek, és x_2 az $\overline{x_1 x_3}$ szakasz felezőpontjára esik, azaz X felírható x, $x+u$, $x-u$ alakban, ahol $\|u\|_p = 1$.

Először legyen $2 \le p < \infty$. A Hölder egyenlőtlenség alapján:

$$\|x\|_p \le \|x\|_2 \le n^{1/2-1/p}\|x\|_p$$

Legyen $d = \lceil n^{1/2-1/p} \rceil \ge 1$, tehát $1 \le \|u\|_2 \le d$.

Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe legyen $\lfloor \|x\|_2^2 \rfloor$ modulo $(2d^2+2)$. Tekintsünk egy x, $x+u$, $x-u$ alakú $(1,1,2)$ háromszöget és indirekt tegyük fel, hogy x, $x+u$ és $x-u$ ugyanazt a színt kapták. Ekkor léteznek a_1, a_2, a_3 egészek, egy $0 \le r < d^2+2$ egész és θ_1, θ_2, θ_3 számok, melyre $0 \le \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, 3)$ úgy, hogy:

$$\|x\|_2^2 = (2d^2+2)\cdot a_1 + r + \theta_1 \tag{4}$$

$$\|x-u\|_2^2 = (2d^2+2)\cdot a_2 + r + \theta_2 \tag{5}$$

$$\|x+u\|_2^2 = (2d^2+2)\cdot a_3 + r + \theta_3 \tag{6}$$

Így: $(5)-(4)$:

$-2\langle x, u \rangle + \|u\|_2^2 = (2d^2+2)(a_2 - a_1) + \theta_2 - \theta_1$

$(6)-(4)$:

$2\langle x, u \rangle + \|u\|_2^2 = (2d^2+2)(a_3 - a_1) + \theta_3 - \theta_1$

Tehát:

$$0 = -2\|u\|_2^2 + (2d^2+2)(a_3 + a_2 - 2a_1) + \theta_3 + \theta_2 - 2\theta_1$$

ami ellentmondás, hiszen $-2 \ge -2\|u\|_2^2 \ge -2d^2$, a_1, a_2, a_3 egészek és $0 \le \theta_i < 1$.

Másodszor legyen $1 < p \le 2$. A Hölder egyenlőtlenség alapján:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_p \le n^{1/p-1/2}\|x\|_2$$

$$n^{1/2-1/p}\|x\|_p \le \|x\|_2 \le \|x\|_p$$

Legyen $d = \lceil n^{1/p-1/2} \rceil \ge 1$, egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe pedig legyen $\lfloor (d\|x\|_2)^2 \rfloor$ modulo $(2d^2+2)$. Az előző esetekhez hasonlóan ellenőrizhető, hogy a színezés nem tartalmaz egyszínű X-el izometrikus halmazt. A színek száma csak lineárisan nő a dimenziószám szerint, tehát ez azt bizonyítja, hogy X nem lehet exponenciálisan l_p–Ramsey (ha $1 < p < \infty$). Ennél erősebb állítás lenne, hogy X nem l_p–Ramsey valamely p értékre. Ehhez olyan konstrukcióra lenne szükség, amely konstans számú színt használ. Egyelőre azonban az euklideszi eseten kívül nem ismert ilyen konstrukció.

2. Aszimmetrikus Ramsey halmazok

Térjünk vissza az euklideszi térbe. Legyen $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan konfigurációpár, hogy $\mathbb{R}^n$ minden piros-kék színezése tartalmaz vagy K_1-el egybevágó piros, vagy K_2-vel egybevágó kék konfigurációt. Ekkor azt mondjuk, hogy $K_1 - K_2$ aszimmetrikusan Ramsey $\mathbb{R}^n$-ben, ezt $\mathbb{R}^n \to (K_1, K_2)$ -el jelöljük. Ellenkező esetben az $\mathbb{R}^n \not\to (K_1, K_2)$ jelölést használjuk.

Erdősék azt a speciális síkbeli esetet vizsgálták, amikor az egyik konfigurációt egy egységtávolságú pontpárnak rögzítjük, a másik konfiguráció tetszőleges. Így a kérdés a következő: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében vagy található egységtávolságú piros pontpár, vagy K-val egybevágó kék konfiguráció?

Egyszerű meggondolás alapján minden 3 vagy kevesebb pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket. Erdősék megmutatták, $\mathbb{R}^n \to (l_2, l_4)$ fennáll, és azt sejtették, hogy más négyszögek, például az egységnégyzet is megfelelő választása K-nak. Néhány évvel később Juhász ennél többet bizonyított, megmutatta, minden 4 pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket:

2.1. Tétel (Juhász [13]). *Legyen K egy tetszőleges 4 pontú konfiguráció. Ekkor $\mathbb{R}^2$ minden megengedett piros-kék színezése tartalmaz K-val egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^n \to (l_2, K)$ minden 4 pontú K konfiguráció esetén fennáll.*

Már Erdősék cikkében is megjelent, hogy létezik olyan konfiguráció, mely nem tesz eleget a feltételeknek; ezt egy 10^{12} pontú konfiguráció segítségével igazolták. Juhász 12 pontú ellenpéldát mutatott, később Csizmadia és Tóth tovább javítottak:

2.2. Tétel (Csizmadia-Tóth [3]). *Létezik egy 8 pontból álló K konfiguráció és R^2-nek egy olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik olyan 8 pontú K konfiguráció, melyre $R^n \not\to (l_2, K)$.*

A feladatot magasabb dimenziós euklideszi terekre, illetve Minkowski terekre is általánosítjuk: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ egy piros-kék színezését megengedettnek nevezünk, ha minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ piros pontpárra $\|x-y\|_C \neq 1$ teljesül.

Jelölje $k_n(C)$ azt a legnagyobb k értéket, melyre teljesül, hogy tetszőleges k pontú K konfiguráció esetén $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden megengedett színezésében létezik K-val izometrikus egyszínű kék konfiguráció. Az euklideszi norma esetén egyszerűen a k_n jelölést használjuk. Jelöljük $*$-gal, ha az egybevágósági transzformációk helyett csak eltolásra szorítkozunk. Definíció alapján rögzített C-re $k_n^*(C) \le k_n(C)$. Az előzőek alapján $4 \le k_2 < 8$ ismert.

Szlam lemmái [20] alapján a $k_n^*(C)$ értéke szoros kapcsolatban áll a tér kromatikus számával:

Szlam egyrészt megmutatta, hogy ha adott $\mathbb{R}^n$-nek egy megengedett piros-kék színezése és egy olyan

k pontú K konfiguráció, hogy K minden eltoltjának legalább az egyik pontja piros, akkor a színezés-konfiguráció pár segítségével megadhatjuk $\mathbb{R}^n$-nek egy jó k-színezését. Lemmáját kicsit általánosabb alakban is megfogalmazhatjuk:

2.3. Lemma. $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq k_n^*(C) + 1$.

Így Frankl és Wilson 1.2. tétele alapján k_n^* és így k_n is legalább exponenciálisan növekszik.
Szlam azt is megmutatta, I. lemmája részben megfordítható. Lemmája szintén változtatás nélkül általánosítható Mikowski terekre:

2.4. Lemma. *Ha $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq k$ és ezt olyan k-színezés igazolja, melyben a színosztályok egymás eltoltjai, akkor az eltolásvektorokból álló halmaz minden eltoltja a k-színezés minden színosztályából pontosan 1-1 pontot tartalmaz, azaz $k_n^*(C) < k$.*

Szlam II. lemmáját a következőképp módosíthatjuk:

2.5. Lemma. *Legyen P egységtávolságot nem tartalmazó halmaz és tegyük fel, hogy P, $P + v_1$, $P + v_2 \ldots P + v_k$ lefedi a teret. Ekkor az eltolásvektorok ellentettjeiből álló konfiguráció minden eltoltja tartalmaz P-beli pontot, azaz $k_n^*(C) < k$.*

Bizonyítás. Megengedett színezést kapunk, ha pirosnak választjuk P pontjait, a többi pontot kéknek. Álljon K az eltolásvektorok ellentettjeiből, azaz $K := \{v = 0, -v_1, \ldots, -v_k\}$. Azt kell megmutatni, hogy egy tetszőleges m vektorra $K + m$ tartalmaz piros pontot: Ha $v + m \in P$, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben létezik i index, hogy $v + m \in P + v_i$, azaz $m \in P + v_i$, vagyis $-v_i + m \in P$. □

Szlam II. lemmájának segítségével tavaly megmutattuk, $k_n^* < \left(3 + o(1)\right)^n$, illetve $k_n^*(C) < \left(4 + o(1)\right)^n$. Idén $k_n(C)$ értékére adunk exponenciális felső korlátot.

Felső korlát $k_n(C)$-re

Első megfigyelésként elmondhatjuk, hogy $k_n(C)$ véges: Legyen $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) = k$. Az Erdős-de-Bruijn tétel [1] alapján létezik egy véges K ponthalmaz, ami ezt tanúsítja, azaz minden K-val egybevágó halmaz a k-színezés minden színosztályából tartalmaz pontot. Válasszuk pirosnak a k-színezés egyik színosztályát, így $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \not\rightarrow (l_2, K)$ teljesül.

Tavaly Rogers [18] tételének következményeként azt is láttuk, hogy $k_n < \left(4 + o(1)\right)^n$. A konstrukció Minkowski terekre való általánosításakor azonban érdekes nehézségbe ütköztünk. Idén ezt a problémát sikerült kiküszöbölni: megmutatjuk, $k_n(C)$ legfeljebb exponenciálisan növekszik:

2.6. Állítás. *Tetszőleges n dimenziós, C egységgömbbel rendelkező Minkowski tér esetén létezik olyan $\left(9 + o(1)\right)^n$ pontú K metrikus tér és $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$-nek egy olyan megengedett piros-kék színezése, hogy minden K-val izometrikus halmaznak legalább az egyik pontja piros. Azaz $k(C)_n < \left(9 + o(1)\right)^n$.*

Bizonyítás. Legyen Λ olyan halmaz, melyre $\{C+\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ a C test egy maximális pakolását határozza meg. A pakolás maximalitása alapján $2C$ minden eltolja tartalmaz Λ-beli pontot.

Legyen $r = 1/2 - o(1)$. Egyrészt megengedett színezést kapunk, ha a $P = \left\{rC + \lambda | \lambda \in \Lambda\right\}$ halmazt színezzük pirosra. Másrészt az is világos, hogy ha K halmaz minden izometrikus $K' = \{x_1, \dots x_k\}$ példányára teljesül, hogy $\cup_{x_i \in K'} \left\{x_i + rC\right\}$ lefedi $2C$ egy eltoltját, akkor $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \not\rightarrow (l_2, K)$.

Definiáljuk a K halmazt a következőképp: Vegyünk $(r/2)C$-nek egy maximális elemszámú pakolását $(2+1/4)C$-ben és K legyen a középpontok halmaza az origóval kiegészítve. Ekkor K egy izometrikus K' példányára továbbra is fennáll, hogy a pontjai köré írt $r/2$ sugarú egységgömbök maximális elemszámú pakolást alkotnak $(2+1/4)C$ valamely eltoltjában, hiszen K' pontjai maximum 2 távol lehet az origó képétől, egymástól pedig legalább r távolságra vannak. Így a K' pontjai körüli r sugarú egységgömbök uniója tartalmaz egy legalább 2 sugarú egységgömböt. Mivel $2C$ minden eltoltja tartalmaz Λ-beli pontot, igy valamelyik $x_i + rC$ is, tehát ennek a középpontja, x_i biztosan piros. Térfogat szerinti becslés alapján a pakolásban maximum $(2+1/4)/(r/2)$ test vehet részt, így $|K| \leq \left(9+o(1)\right)^n$. $\square$

3. További kérdések

A félév során sok izgalmas kérdés merült fel, a továbbiakban ezeken szeretnék még dolgozni.

Egyrészt tovább szeretném vizsgálni az erősen Ramsey, illetve l_p-Ramsey halmazok tulajdonságait. Azt láttuk, hogy tetszőleges p esetén minden háromszög l_p-Ramsey. Vajon az is igaz, hogy minden háromszög erősen Ramsey?

Az $l_p - (1,1,2)$ háromszög esete további vizsgálatokra szorul: mely p értékek esetén nem l_2-Ramsey? Milyen érdekes példák vannak nem l_2-Ramsey, illetve nem exponenciálisan l_2-Ramsey halmazra?

A Csizmadia-Tóth problémakör is még rengeteg érdekes kérdést tartalmaz:

A $k_n(C)$ felső korlátra adott konstrukció Minkowski síkban is megfelelő, de kérdés, tudunk-e ennél jobb korlátot adni? Illetve szeretnék érdekes speciális eseteket keresve néhány esetet külön megvizsgálni.

Ahogy láttuk, a feladat szoros kapcsolatban áll a tér kromatikus számával, ami önmagában is érdekes probléma: A pontos érték meghatározása már síkban is meglehetősen nehéz feladatnak bizonyul. Egyszerű példák mutatják, hogy hét szín elég, de három szín nem. Néhány éve de-Grey [12] megmutatta: $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2)$. Tehát euklideszi esetben a lehetséges válaszok: 5, 6 vagy 7. Nemrég Ismailescu és társai [7] a szabályos 8, 10, illetve 12−szög által meghatározott Minkowski teret vizsgálták és megmutatták, ezekben az esetekben is legalább 5 szín szükséges. A másik irányból közelítve Chilakamarri [2] tétele alapján kis csúcsszámú szabályos sokszögek által meghatározott Minkowski tér esetén lehet javítani a 7-es felső korláton. Érdekes kérdés, hogy mely Minkowski sík esetén elegendő 6 szín.

Hivatkozások

[1] N. D. Bruijn, P. Erdős (1951) *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indigationes Mathematicae, 13, 371 – 373.

[2] Chilakamarri, B. Kiran (1991) *Unit-distance graphs in Minkowski metric spaces*, Geometriae Dedicata 37.3 : 345 – 356.

[3] Gy. Csizmadia, G. Tóth (1994) *Note on a Ramsey-type problem in geometry*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 65(2), 302 – 306.

[4] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus (1973) *Euclidean Ramsey Theorems*, J. Combin. Theory A14 : 341 – 363.

[5] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems II.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol. 10, Infinite and Finite Sets: 529 – 557, North-Holland, Amsterdam.

[6] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G.Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems III.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol.10, Infinite and Finite Sets: 559 – 583, North-Holland, Amsterdam.

[7] G. Exoo, D. Fisher, D. Ismailescu (2021). *The chromatic number of the Minkowski plane – the regular polygon case*, arXiv preprint arXiv:2108.12861.

[8] P. Frankl, V. Rödl (1986) *All Triangles Are Ramsey*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 297, no. 2, 1986, pp. 777 – 779.

[9] P. Frankl, V. Rödl (1987) *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society, 300(1), 259 – 286.

[10] P. Frankl, R. M. Wilson (1981) *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, 1(4), 357 – 368.

[11] R. L. Graham (1990) *Topics in Euclidean Ramsey Theory*, In Mathematics of Ramsey Theory (pp. 200 – 213), Springer, Berlin, Heidelberg.

[12] A. de Grey (2018) *The Chromatic Number of the Plane Is at least 5*, Geombinatorics, 28, 5 – 18.

[13] R. Juhász (1979) *Ramsey type theorems in the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 27(2), 152 – 160.

[14] I. Kříž (1991) *Permutation groups in Euclidean Ramsey theory*, Proceedings of the American Mathematical Society, 112(3), 899 – 907.

[15] A. Kupavskii, A. Sagdeev (2020) *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, arXiv preprint arXiv:2008.02008.

[16] I. Leader, P. A. Russell, M. Walters (2012) *Transitive sets in Euclidean Ramsey theory* Journal of Combinatorial Theory, Series A 119.2, 382 – 396.

[17] F. P. Ramsey (1930) *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30, 264 – 286.

[18] C. A. Rogers (1963) *Covering a sphere with spheres*, Mathematika 10, 157 – 164.

[19] A. A. Sagdeev (2018) *Exponentially Ramsey sets*, Problems of Information Transmission, 54(4), 372 – 396.

[20] A. D. Szlam (2001) *Monochromatic translates of configurations in the plane*, Journal of combinatorial theory. Series A, 93(1), 173 – 176.