Euklideszi Ramsey elmélet

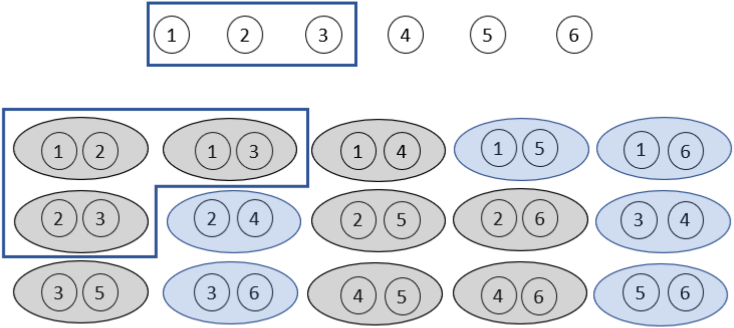
Gehér Panna
Témavezető: Tóth Géza

2021-2022. I. félév

Ramsey halmazok

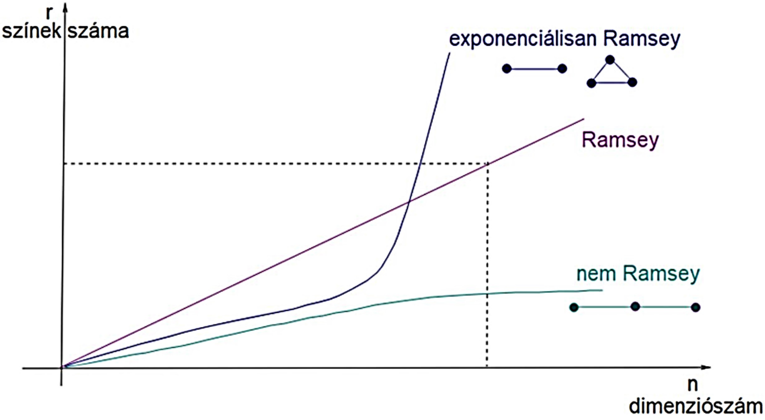
Ramsey tétele (1930)

$\forall\ k < l,\ r$ értékekre $\exists$ egy legkisebb $R := R(l,k,r)$ szám:
$\forall\ |N| = R$ halmaz k elemű részhalmazait r színnel színezve
$\exists\ l$ elemű $X \subseteq N$: $X\ \forall$ k elemű részhalmaza azonos színű



Ramsey halmazok

Egy halmaz **Ramsey**, ha $\forall\, r$ egészre $\exists\, n_0 := n_0(r)$, hogy $n \geq n_0$ esetén $\mathbb{R}^n$ $\forall\, r-$színezésében van vele egybevágó egyszínű halmaz



l_p-Ramsey halmazok

Definíció (l_p-Ramsey halmaz)

Legyen p rögzített.
Egy metrikus tér l_p-Ramsey, ha $\forall\ r \in \mathbb{Z}_+^n$-ra $\exists\ n_0 := n_0(r)$, hogy $n \geq n_0$ esetén $(\mathbb{R}^n, l_p)\ \forall\ r$-színezésében van vele izometrikus egyszínű halmaz.

Ismert:

- tetszőleges p-re  exponenciálisan l_p-Ramsey
- $\forall$ véges metrikus tér exp. $l_\infty-$Ramsey (Kupavskii-Sagdeev)
- $\forall$ l_p-ben ⊾ és hegyesszögű Δ exp. l_p-Ramsey (Sagdeev)

Megmutatjuk: tetszőleges p-re minden Δ l_p-Ramsey

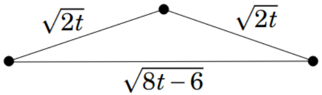
Háromszögek az euklideszi térben

Tétel (Frankl-Rödl, 1986)

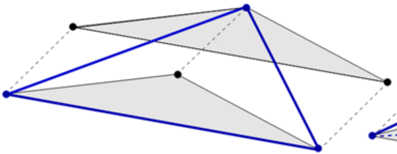
Minden háromszög l_2-Ramsey.

Ötlet:

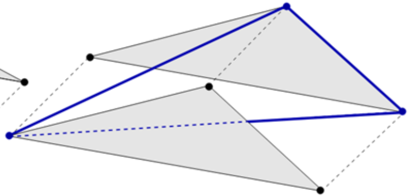
1. lépés:



2-3. lépés: Szorzás tétel



Egyenlőszárú Δ előállítása



Tetszőleges Δ előállítása

Háromszögek az euklideszi térben

1. lépés részletesen: $n := R(2t+1, 2t-1, r)$

- Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a következő alakú pontok halmaza:

$$\{1 \ldots 2 \ldots \ldots t \ldots t-1 \ldots \ldots 2 \ldots 1\}$$

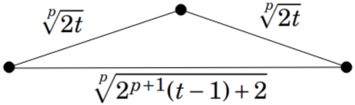
- S halmaz $r-$színezése $\rightsquigarrow$ $[n]$ halmaz $2t-1$ elemű részhalmazainak $r-$színezése
- Az n választása alapján $\exists$ $2t+1$ elemű $\{i_1, i_2 \ldots i_{2t+1}\}$ halmaz, melynek $\forall$ $2t-1$ elemű részhalmaza egyszínű

$$\begin{array}{l}
\phantom{A := \{\ldots} i_1 \quad i_2 \quad i_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i_{2t+1} \\
A := \{\ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots \ldots t \ldots \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots\} \\
B := \{\ldots 0 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots \ldots t \ldots \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1 \ldots 0 \ldots\} \\
C := \{\ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots \ldots t \ldots \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1 \ldots\}
\end{array}$$

A, B, C pontok megfelelőek ✓

Háromszögek l_p terekben

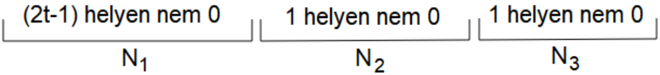
1. lépés:



$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[p]{2t}+\sqrt[p]{2t}}{\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}} = 1$$

2-3. lépés: $\approx$ Szorzás tétel

$n = N_1 + N_2 + N_3$ dimenziós pontok, melyek koordinátái:



- első N_1: $2t-1$ helyen: $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots t\varepsilon, (t-1)\varepsilon, \dots \varepsilon$, többi: 0
- következő N_2: 1 helyen α, többi 0
- utolsó N_3: 1 helyen β, többi 0

Háromszögek l_p terekben

N_1, N_2, N_3 meghatározása:

- $\mathbb{R}^n$ $r-$színezése $\to [N_1]$ $(2t-1)$-eseinek $r^{N_2\cdot N_3}-$ színezése
  $\to N_1 := R\left(2t+1,\ 2t-1\ ,\ r^{N_2\cdot N_3}\right)$
- $\mathbb{R}^{N_2+N_3}$ $r-$színezése $\to [N_2]$ $r^{N_3}-$színezése
  $\to N_2 := R\left(2,1,r^{N_3}\right) = r^{N_3}+1$
- $\mathbb{R}^{N_3}$ $r-$színezése $\to [N_3]$ $r-$színezése
  $\to N_3 := R\left(2,1,r\right) = r+1$

Az n választása alapján $\exists$ egyszínű pontok a következő alakban:

$$\left\{\dots\varepsilon\dots2\varepsilon\dots t\varepsilon\dots2\varepsilon\dots\varepsilon\dots0\dots0\dots\middle|\dots\alpha\dots0\dots\middle|\dots\beta\dots0\dots\right\}$$

$$\left\{\dots0\dots\varepsilon\dots2\varepsilon\dots t\varepsilon\dots2\varepsilon\dots\varepsilon\dots0\dots\middle|\dots0\dots\alpha\dots\middle|\dots\beta\dots0\dots\right\}$$

$$\left\{\dots0\dots0\dots\varepsilon\dots2\varepsilon\dots t\varepsilon\dots2\varepsilon\dots\varepsilon\dots\middle|\dots\alpha\dots0\dots\middle|\dots0\dots\beta\dots\right\}$$

az α, β, t, ε értékeket jól választva tetszőleges Δ-et előállíthatunk $\checkmark$

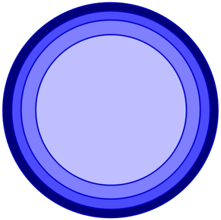
Nem l_2−Ramsey halmazok

Tétel (Erdős és társai, 1975)

Ha egy halmaz nem gömbi, akkor nem l_2−Ramsey.

Legegyszerűbb nem l_2−gömbi halmaz:
$(1, 1, 2)$ oldalú elfajuló Δ 

$x \in \mathbb{R}^n$ színe: $\left\lfloor \|x\|^2 \right\rfloor$ mod 4



Többi l_p normában?

- exponenciálisan l_∞−Ramsey (Kupavskii – Sagdeev, 2020)
- ha $1 < p < \infty$: nem exponenciálisan l_p−Ramsey
  különbség: egységgömb szigorúan konvex
  $\rightarrow \forall$ euklideszi beágyazásban: 

- exponenciálisan l_1−Ramsey (Sagdeev, 2018)

Aszimmetrikus problémák

Aszimmetrikus problémák

Jelölés: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \to (K_1, K_2)$

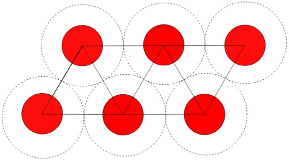
$(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden piros-kék színezésében van K_1 vagy K_2

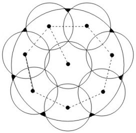
K_1-et rögzítsük: 

Feladat: Legnagyobb $k_n(C)$ érték, melyre minden $k_n(C)$ pontú K_2-re $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \to ($  $, K_2)$

Ismert:

- Juhász, 1979: $k_2 \geq 4$
- Csizmadia –Tóth, 1994 $k_2 < 8$





Lemma (Szlam I.)

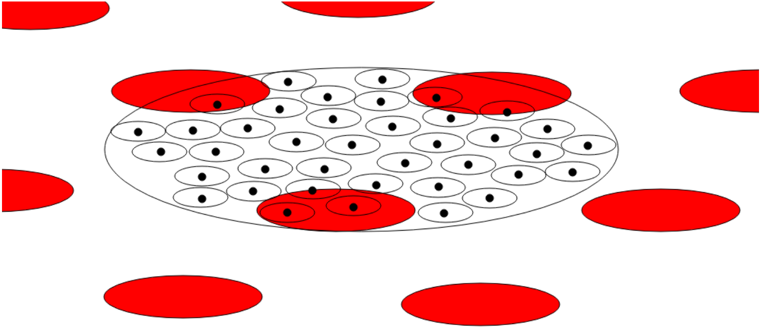
$\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq k_n(C) + 1.$

Következmény k_n exponenciálisan nő

Felső korlát $k_n(C)$ értékére

Tavaly – Rogers fedési tételének segítségével: $k_n < \left(4 + o(1)\right)^n$

Idén – óvatosabb fedéssel: $k_n(C) < \left(9 + o(1)\right)^n$

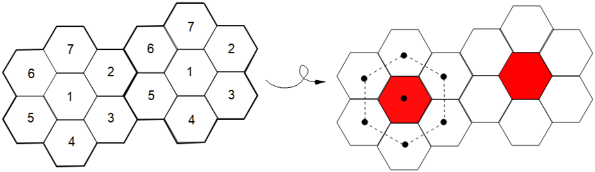


Szlam II. lemmája

Módosított feladat: Csak eltolást engedünk meg – $k_n^*(C)$

Lemma (Szlam II.)

Ha $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq k$ és a színosztályok egymás eltoltjai, akkor $k_n^*(C) < k$.



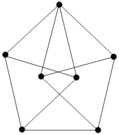
Tavaly: ha a színosztályok rácsszerűek, akkor elég, ha az egyik színosztály k eltoltja lefedi a teret
$\rightarrow k_n^* < \left(3 + o(1)\right)^n$, $k_n^*(C) < \left(4 + o(1)\right)^n$

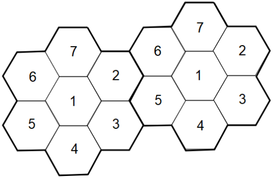
Szlam II. további módosítása:
A rácsszerű tulajdonság is elhagyható

Minkowski sík kromatikus száma

Feladat: Legkevesebb színszám meghatározása, hogy egyik színoszályban se legyen egyszínű

Lehetséges értékek:





- általános esetben:

  4, 5, 6, 7

- szabályos 4, 6-szög: 4 (Chilakamarri, 1991)
- euklideszi eset: ~~4~~, 5, 6, 7 (de-Grey, 2018)
- szabályos 8-szög: ~~4~~, 5, 6, ~~7~~ (Ismailescu és t., 2021 ill. Chilakamarri)
- szabályos 10,12-szög: ~~4~~, 5, 6, ~~7~~?? (Ismailescu és t.)