Önálló projekt beszámoló

Encz Koppány

2021

Szivárványszínezések 2 feszítőfa uniójában

A félév első felében a következő kérdést vizsgáltuk: adva van n csúcson egy gráf, amely előáll 2 éldiszjunkt feszítőfa uniójaként; valamint adott egy színezés az éleken $n-1$ színnel úgy, hogy minden szín pontosan kétszer fordul elő. Döntsük el (akár algoritmikusan is), hogy mikor van 2 éldiszjunkt tarka feszítőfa a gráfban (egy fát most akkor hívunk tarkának, ha minden színből pontosan 1 élt tartalmaz).

Első észrevételként megemlíthetjük, hogy a probléma relaxáltja, azaz egyetlen tarka feszítőfa keresése megoldható polinom időben. Ekkor a kérdést ugyanis átfogalmazhatjuk matroid-metszet feladattá: ha $\mathcal{M}_1$ a gráf körmatroidja, $\mathcal{M}_2$ pedig egy partíciós matroid, melyben a partíció-osztályok megfelelnek a színosztályoknak, a hozzájuk tartozó küszöb pedig 1; akkor egy tarka feszítőfa megfelel egy olyan maximális méretű élhalmaznak, amely $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ szerint is független. Ennek a maximális matroid-metszet feladatnak pedig polinom időben meg tudjuk keresni a megoldását, és csak azt kell ellenőriznünk, hogy a válaszul kapott élhalmaz mérete $n-1$, vagy pedig kevesebb.

Az általános probléma ennél jóval nehezebb, ám néhány speciális esetben ez is megoldható. Ha például a gráf 2 csillag uniója, akkor könnyű megmutatni, hogy mindig van 2 diszjunkt tarka feszítőfa. Először tegyük fel, hogy nincs párhuzamos élpár, amely azonos színű (egy ilyen élpárt ugyanis el lehetne hagyni a gráfból) Azután válasszunk egy párhuzamos élpárt, és az egyik példányt (e_1) rekjuk be egy T_1 élhalmazba, a másikat (e_2) egy T_2-be. Ezután már egyértelműen egészíthető ki T_1 és T_2 tarka feszítőfáva két különböző lépés iterálásával: az első lépésben a másik $c(e_1)$ színű élt rakjuk be T_2-be, és a másik $c(e_2)$ színű élt rakjuk be T_1-be. A második típusú lépésben pedig az újonnan bevett élek párját (azt az egyértelmű élt, amelyet hozzávéve kör keletkezne) vegyük be a másik T_i-be. A fenti két lépést iterálva garantáljuk, hogy az aktuális lépésben T_1 és T_2 is körmentes, és nem tartalmaznak azonos színű éleket. Vagyis ha az algoritmus elakadás nélkül végigfut, akkor a végén két diszjunkt tarka festítőfát kapunk.

Ha az algoritmus valahol elakad, az csak úgy történhet meg, hogy T_1 és T_2 együtt az eredeti gráfnak egy feszített részgráfját adják, melyben minden szín pontosan 2-szer fordul elő. Ekkor megjegyezzük az aktuális T_1-es és T_2-t, a feszített részgráfot törüljük, amivel visszavezetjük a problémát egy kisebb gráfra.

Hasonlóan egy speciális színezésű gráfról megmutatható, hogy van benne két tarka feszítőfa:

0.0.1. Állítás. Legyen G két feszítőfa uniója n ponton, és tegyük fel, hogy nincs benne párhuzamos él. Tegyük fel, hogy az élei $n-1$ színnel vannak színezve úgy, hogy egy csúcs kivételével minden csúcsra igaz, hogy a rá illeszkedő élek között szerepel egy színosztály mindkét tagja. Ekkor G-ben van két diszjunkt tarka feszítőfa.

A bizonyításhoz szükség lesz a két diszjunkt feszítőfaként előálló gráfok konstruktív karakterizációjára:

0.0.2. Lemma. *G gráf előáll 2 diszjunkt feszítőfa uniójaként pontosan akkor, ha az alábbi 2 lépések sorozatával megkapható az 1 pontú üres gráfból:*

- *felveszünk egy új pontot, majd összekötjük 2 korábbi (nem feltétlenül különböző) ponttal*
- *egy uv élet felosztunk egy új w ponttal, és w-t összekötjük egy korábbi w' ponttal*

Bizonyítás. Azt könnyű látni, hogy ha egy gráf előáll a fenti 2 lépés ismétlésével, akkor 2 diszjunkt feszítőfa uniója, hiszen ezt a tulajdonságot mindkét típusú lépésnél megőrzi. Ez a 2-fokú pontra nyilvánvaló; a harmadfokú pontnál tegyük fel, hogy uv él a T_1 fában volt benne. Ekkor $(T_1 \setminus \{uv\}) \cup \{wv\} \cup \{wu\}$ feszítőfa lesz, hiszen körmentes: egy kör csak az új vw és wu éleken mehetne át, ekkor azonban ezt a két élet összehúzva uv éllé az eredeti T_1 fában kapnánk egy kört. Az új T_2 szintén feszítőfa, mert csak az új w csúcshoz húztunk be egy új élt

A másik irányt indukcióval bizonyítjuk; ehhez elég igazolni, hogy a 2 lépés bármelyikét visszacsinálva 2 diszjunkt feszítőfa unióját kapjuk. Vegyük észre, hogy a 2 fa uniójaként előálló gráfokban mindig van legfeljebb 3-adfokú pont. Valóban, különben az élek száma legalább $\frac{4n}{2} = 2n > 2(n-1)$ lenne, ahol $2(n-1)$ a 2 fa uniójaként előálló gráfok élszáma. Ugyanakkor minden csúcs foka legalább 2, hiszen mindkét feszítőfából illeszkedik rá legalább 1 él. Tehát mindig tudunk találni 2 vagy 3 fokú pontot. Ha van 2 fokú pont a gráfban, akkor mindkét feszítőfában elsőfokú lesz. A két rá illeszkedő élt törölve ekkor mindkét fában egy levél törlődik, azaz továbbra is 2 fa uniója lesz.

Most tegyük fel, hogy van egy harmadfokú v csúcs, u, w és t szomszédokkal. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy a v-re illeszkedő 3 él törlése után az uw, wt, tu élek közül egyet be tudunk úgy húzni, hogy a kapott gráf még két feszítőfa uniója legyen. Ehelyett azt az erősebb állítást igazoljuk, hogy wt és tu közül az egyik behúzása megfelelő lesz. Tegyük fel ugyanis, hogy sem wt, sem tu behúzása után nem marad 2 diszjunkt feszítőfa. Mivel v törlése és az új él behúzása után a csúcsok száma $n-1$, az élek száma pedig $2(n-1) - 3 + 1 = 2(n-2)$, ezért ez a Nash-Williams-tétel szerint csak úgy lehetséges, ha a kapott G' gráfban van egy X halmaz, amely wt behúzása után sérti az $i(X) \leq 2(|x| - 2)$ feltételt; és van egy Y halmaz, amely tu behúzása után sérti az $i(Y) \leq 2(|Y| - 1)$ feltételt. Azonban az élek behúzása előtt ezek a feltételek nem sérülhettek, hiszen előtte volt 2 diszjunkt feszítőfa a gráfban. Ez csak úgy lehetséges, hogy $i(X) = 2(|X| - 1)$ és $i(Y) = 2(|Y| - 1)$.

Ekkor azonban a szubmoduláris egyenlőtlenség szerint

$$2(|X|-1)+2(|Y|-1)=i(X)+i(Y)=i(X\cap Y)+i(X\cup Y)\leq$$

$$\leq 2(|X\cup Y|-1)+2(|X\cap Y|-1)=2(|X|-1)+2(|Y|-1),$$

ahonnan adódik, hogy $i(X\cup Y)=2(|X\cup Y|-1)$. Ugyanakkor $i(X\cup Y\cup\{v\})=i(X\cup Y)+3$ az eredeti gráfban, tehát $i(X\cup Y\cup\{v\})=2|X\cup Y|+1=2|X\cup Y\cup\{v\}|-1>2(|X\cup Y\cup\{v\}|-1)$, ami ellentmond annak, hogy az eredeti gráfban volt 2 diszjunkt feszítőfa.

Ezek után rátérhetünk az állítás bizonyítására. Ha a gráfban van másodfokú pont, akkor a feltétel szerint mindkét rá illeszkedő él azonos színű. Hagyjuk el a pontot a 2 éllel együtt, a fenti lemma szerint továbbra is 2 feszítő uniója lesz a gráf. Továbbá mivel az elhagyott 2 él nem hurokél volt, mindkét él nem elhagyott végpontjára továbbra is teljesülni fog, hogy van két azonos színű rá illeszkedő él. Innen az állítás indukcióval adódik, hiszen a maradék gráf $n-1$ csúcsú $2(n-2)$ éllel és $n-2$ darab 2 méretű színosztállyal úgy, hogy minden csúcsra illeszkedik 2 azonos színű él.

Most tegyük fel, hogy van egy harmadfokú v csúcs a gráfban, a három szomszédja legyen u, w és t. Feltehető, hogy vu és vt színe 1, vw színe pedig 2. A lemma bizonyításában látott erősebb állítás szerint ekkor v törlése után wt és wu közül az egyik behúzása után továbbra is 2 feszítőfa uniója lesz a gráf. Címkézzük fel ezt az új élt a 2 színnel. Ezután u-ra és t-re továbbra is illeszkedik 2 azonos színű él, hiszen a törölt élek színe náluk csak egyszer fordult elő. Valamint a w-re illeszkedő 2 színű él törlése után a rá illeszkedő új él színe 2 lett, így ez a feltétel rá is teljesül. Innen az állítás indukcióval adódik.

Minimális "gap" vágásokban

A félév második részében egy újabb téma vizsgálatába kezdtünk bele, amely azonban kapcsolódik a fentiekben tárgyalt témához: a motivációt most is a 2 éldiszjunkt feszítőfa uniójaként előálló gráfok adták.

Az alapprobléma a következő: vegyünk egy gráfot n csúcson $2(n-1)$ éllel, amely előáll 2 éldiszjunkt feszítőfa uniójaként, és számozzuk meg az éleit az $1, 2, \ldots, 2(n-1)$ számokkal. Az a sejtés, hogy a számozást mindig meg tudjuk úgy csinálni, hogy a gráf valamennyi vágásában van 2 szomszédos számmal címkézett él.

Érdekesség, hogy ha vágások helyette a gráf köreire követeljük meg azt a tulajdonságot, hogy legyen bennük 2 szomszédos szám, akkor mindig meg tudjuk úgy számozni az éleket, hogy ez a feltétel teljesüljön. Ehhez elég tekinteni a korábbiakban tárgyalt karakterizációját a 2 fa uniójaként előálló gráfoknak. Ha van egy másodfokú pont, akkor a rá illeszkedő élekre írjuk rá a $2n-2, 2n-3$ számokat, majd a 2 élt a csúccsal együtt töröljük a gráfból. Ha pedig egy harmadfokú v pont van, akkor töröljük a rá illeszkedő vu, vw, vt éleket, és húzzuk be a megfelelő (pl ut) élt. Indukcióval kapjuk ennek a gráfnak egy számozását. Ha az ut él a k számot kapta, akkor a k-nál nagyobb számokat növeljük meg 2-vel, és a vu, vw, vt élekre írjuk rendre a $k+2, k+1, k$ számokat. Ekkor a vu, vw, vt éleket elkerülő körök továbbra is teljesítik a tulajdonságot. Ha egy kör a $k, k+1$, vagy a $k+1, k+2$ címkéjű éleken megy át, akkor szintén teljesül rá a feltétel. Ha pedig a $k, k+2$ címkéjű éleken megy át, és ezeket az éleket elhagyva nincs benne 2 szomszédos címkéjű él, akkor az eredeti számozás szerint a k címkéjű ut élnek vagy a $k-1$ címkéjű, vagy pedig a $k+1$ címkéjű párja rajta volt a körön. Előbbi esetben a k címkéjű vt és a $k-1$ címkéjű él, utóbbi esetben pedig a $k+2$ címkéjű vu és a $k+3$ címkéjű él lesz rajta a körön.

A probléma általánosabban is megfogalmazható: tekintsünk egy tetszőleges G gráfot e éllel, majd számozzuk meg az éleit az $1, 2, \ldots, e$ számokkal úgy, hogy minden vágásban legyen 2 olyan él, melyekre a nagyobb és kisebb címke különbsége legfeljebb k (ennek persze csak akkor van értelme, ha a gráf kétszeresen élösszefüggő). Legyen $K(G)$ a legkisebb ilyen k, amelyre van olyan számozás, hogy minden vágásban van legfeljebb k nagyságú "gap". Ezt a $K(G)$ értéket szeretnénk meghatározni, vagy akár csak becsülni.

Egy egyszerű észrevétel a következő: tegyük fel, hogy G λ-szorosan élösszefüggő (az is elég, hogy minden csúcs foka legalább λ), $\lambda > 2$. Ekkor a szélességi keresés alapján a gráfban van legfeljebb $2\frac{log(n-1)}{log(\lambda-1)}+1$ hosszú kör. Számozzuk meg a kör éleit az $1, 2, \ldots k < 2\frac{log(n-1)}{log(\lambda-1)}+1$ számokkal, majd húzzuk össze a kör pontjait, és iteráljunk. Ezután tekintsük az eredeti gráf egy tetszőleges vágást, majd keressük meg az első olyan iterációt, amely után a következő kör belemetsz a vágásba. Ekkor ebben a vágásban a körnek legalább 2 éle is szerepel, így ezen vágás "gap"-je legfeljebb $2\frac{log(n-1)}{log(\lambda-1)}$. Ezzel megmutattuk, hogy egy λ-élösszefüggő gráfra $K(G) \leq 2\frac{log(n-1)}{log(\lambda-1)}$. Az továbbra is nyitott kérdés, hogy ennél jobb becslést tudunk-e mondani.

A két gráf uniójaként felírt gráfokhoz hasonlóan ebben az általánosabb esetben is kimondhatunk egy sejtést, amely néhány egyszerű eset vizsgálatával megindokolható: $K(G) \leq 1 + \min\{|E| : E \text{ élhalmaz}, G+E\text{-ben van két diszjunkt feszítőfa}\}$. Az n csúcsú C_n kör esetén mindkét oldal $n-1$, míg ha G-t a K_4 gráfból egy él elhagyásával kapjuk, akkor mindkét oldal 2. Ugyanakkor a sejtésben egyenlőséget nem állíthatunk, mert például a Petersen-gráfra a jobb oldal 4, míg létezik élszámozás 3 méretű minimális gap-pel.

Végezetül megemlítjük, hogy ennek a sejtésnek speciális esete a két fa uniójára megfogalmazott sejtés, hiszen a korábbi sejtést elfogadva itt mindkét oldal 1 lesz.